MINISTERIO DE
educación
ESTADO PLURINACIONAL DE BOLIVIA

NA
Nivelación
Académica

Guía de Estudio

Ecuaciones Diferenciales y Variable Compleja

Matemática

as

Colección:
GUÍAS DE ESTUDIO - NIVELACIÓN ACADÉMICA

DOCUMENTO:
Unidad de Formación
Ecuaciones Diferenciales y Variable Compleja
Documento de Trabajo

Coordinación:
Dirección General de Formación de Maestros
Nivelación Académica

Como citar este documento:
Ministerio de Educación (2016). Guía de Estudio: Unidad de Formación "Ecuaciones Diferenciales y Variable Compleja", Equipo Nivelación Académica, La Paz Bolivia.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

ESTADO PLURINACIONAL DE BOLIVIA

NA

Ecuaciones Diferenciales y Variable Compleja

Matemática

Puntaje

Datos del participante

Nombres y Apellidos: ....

Cédula de identidad: ....

Teléfono/Celular: ....

Correo electrónico: ....

UE/CEA/CEE: ....

....

ESFM: ....

Centro Tutorial: ....

Índice

Presentación

El proceso de Nivelación Académica constituye una opción formativa dirigida a maestras y maestros sin pertinencia académica y segmentos de docentes que no han podido concluir distintos procesos formativos en el marco del PROFOCOM-SEP. EL mismo ha sido diseñado desde una visión integral como respuesta a la complejidad y las necesidades de la transformación del Sistema Educativo Plurinacional.

Esta opción formativa desarrollada bajo la estructura de las Escuelas Superiores de Formación de Maestras/os autorizados, constituye una de las realizaciones concretas de las políticas de formación docente, articuladas a la implementación y concreción del Modelo Educativo Sociocomunitario Productivo (MESCP), para incidir en la calidad de los procesos y resultados educativos en el marco de la Revolución Educativa con 'Revolución Docente' en el horizonte de la Agenda Patriótica 2025.

En tal sentido, el proceso de Nivelación Académica contempla el desarrollo de Unidades de Formación especializadas, de acuerdo a la Malla Curricular concordante con las necesidades formativas de los diferentes segmentos de participantes que orientan la apropiación de los contenidos, enriquecen la práctica educativa y coadyuvan al mejoramiento del desempeño docente en la UE/CEA/CEE.

Para apoyar este proceso se ha previsto el trabajo a partir de Guías de Estudio, Dossier Digital y otros recursos, los cuales son materiales de referencia básica para el desarrollo de las Unidades de Formación.

Las Guías de Estudio comprenden las orientaciones necesarias para las sesiones presenciales, de concreción y de socialización. En función a estas orientaciones, cada tutora o tutor debe enriquecer, regionalizar y contextualizar los contenidos y las actividades propuestas de acuerdo a su experiencia y a las necesidades específicas de las y los participantes.

Por todo lo señalado se espera que este material sea de apoyo efectivo para un adecuado proceso formativo, tomando en cuenta los diferentes contextos de trabajo y los lineamientos de la transformación educativa en el Estado Plurinacional de Bolivia.

Roberto Iván Aguilar Gómez
MINISTRO DE EDUCACIÓN

Estrategia Formativa

El proceso formativo del Programa de Nivelación Académica se desarrolla a través de la modalidad semipresencial según calendario establecido para cada región o contexto, sin interrupción de las labores educativas en las UE/CEA/CEEs.

Este proceso formativo, toma en cuenta la formación, práctica educativa y expectativas de las y los participantes del programa, es decir, maestras y maestros del Sistema Educativo Plurinacional que no concluyeron diversos procesos formativos en el marco del PROFOCOM-SEP y PPMI.

Las Unidades de Formación se desarrollarán a partir de sesiones presenciales en periodos intensivos de descanso pedagógico, actividades de concreción que la y el participante deberá trabajar en su práctica educativa y sesiones presenciales de evaluación en horarios alternos durante el descanso pedagógico. La carga horaria por Unidad de Formación comprende:

SESIONES PRESENCIALES	CONCRECIÓN EDUCATIVA	SESIÓN PRESENCIAL DE EVALUACIÓN	
24 Hrs.	**50 Hrs.**	**6 Hrs.**	80 Hrs. X UF

FORMACIÓN EN LA PRÁCTICA

Estos tres momentos consisten en:

1er. MOMENTO (SESIONES PRESENCIALES). Parte de la experiencia cotidiana de las y los participantes, desde un proceso de reflexión de su práctica educativa.

A partir del proceso de reflexión de la práctica de la y el participante, la tutora o el tutor promueve el diálogo con otros autores/teorías. Desde este diálogo de la y el participante retroalimenta sus conocimientos, reflexiona y realiza un análisis comparativo para generar nuevos conocimientos desde su realidad.

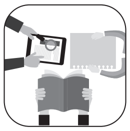
2do. MOMENTO (CONCRECIÓN EDUCATIVA). Durante el periodo de concreción de la y el participante deberá poner en práctica con sus estudiantes o en su comunidad educativa lo trabajado (contenidos) durante las Sesiones Presenciales. Asimismo, en este periodo de la y el participante deberá desarrollar procesos de autoformación a partir de las orientaciones de la tutora o el tutor, de la Guía de Estudio y del Dossier Digital de la Unidad de Formación.

3er. MOMENTO (SESIÓN PRESENCIAL DE EVALUACIÓN). Se trabaja a partir de la socialización de la experiencia vivida de la y el participante (con documentación de respaldo); desde esta presentación de la tutora o el tutor deberá enriquecer y complementar los vacío y posteriormente avaluar de forma integral la Unidad de Formación.

Objetivo Holístico de la Unidad de Formación

Una vez concluida la sesión presencial (24 horas académicas), la y el participante deberá construir el objetivo holístico de la presente Unidad de Formación, tomando en cuenta las cuatro dimensiones.

Orientaciones para la Sesión Presencial



En la presente Unidad de Formación, por ser de carácter formativo y evaluable, las maestras y los maestros participantes del programa de nivelación académica, trabajarán en equipos comunitarios en la diversidad de actividades teóricas/prácticas/investigativas programadas para el desarrollo de los temas y contenidos, que le permitirán familiarizar con la nomenclatura y la notación de la teoría de "Ecuaciones Diferenciales y Variable Compleja".

Antes de iniciar con el primer tema encontrarás la actividad titulada "Partiendo desde Nuestra Experiencia", este espacio, nos permite reflexionar y exteriorizar los saberes y conocimientos propios o ancestrales, a partir de nuestra experiencia y la realidad socio-educativa en relación a los temas de la Unidad de Formación.

Durante el proceso del desarrollo de los temas de la Unidad de Formación, debemos acudir constantemente al material bibliográfico (Dossier Digital), puesto que ayudaran a tener una visión más amplia y clara. Asimismo, lograr las diversas tareas asignadas en cada uno de los temas de toda la guía.

Específicamente en el periodo asignado para sesiones presenciales de esta Unidad de Formación, se recomienda tomar en cuenta dos aspectos:

1. Organización del Ambiente, es fundamental considerar nuevas formas de organización de los espacios educativos que pueden ser cerrados o abiertos, lo importante es tomar en cuenta las características del espacio pedagógico y el tema a desarrollar; así como, las necesidades, intereses y posibilidades de las y los participantes, que permitan compartir experiencias y reflexionar críticamente sobre los nuevos conocimientos en equipos comunitarios.
2. Actividades formativas, considerando que este espacio comprende dos momentos: Sesión presencial bajo el acompañamiento y orientación del docente tutor y la sesión de concreción de autoformación a distancia. Durante este proceso, las y los participantes de manera individual o en equipos comunitarios deben acudir permanentemente a los materiales de apoyo bibliográfico y la profundización a partir del diálogo con los autores en los contextos de trabajo.

Las actividades formativas irán desarrollándose de acuerdo a las consignas y tareas asignadas a lo largo de los temas de la Unidad de Formación "Ecuaciones Diferenciales y Variable Compleja".

Materiales Educativos

Es fundamental priorizar adecuadamente los recursos y materiales educativos porque constituyen herramientas primordiales para el desarrollo y producción de conocimientos en el proceso de aprendizaje específico, que faciliten la apropiación de definiciones, habilidades, actitudes y destrezas.

A continuación, mencionamos los diferentes materiales/recursos educativos que apoyaran el desarrollo de los temas de la Unidad de Formación "Ecuaciones Diferenciales y Variable Compleja", que permitirá la producción de conocimientos significativos durante todo el proceso formativo.

Descripción del Material/recurso educativo	Producción de conocimientos
Experiencias del contexto sociocultural	Ayudan a formular y resolver problemas matemáticos a partir de las experiencias de la vida en situaciones del contexto.
Instrumento Geométricos: Regla, escuadra, transportador y compás	Facilitan el trazo del plano complejo, ayudan a representar gráficas de ecuaciones diferenciales y números complejos; para asegurar y demostrar la teoría.
Calculadora científica	Asegurar cálculos de operaciones algebraicas, trigonométricas, derivadas e integrales. Incluso graficar funciones.
Equipo Data show	Aclarar y profundizar conceptualizaciones y teoremas de los diferentes temas, visualizar los videos; de manera que genere la construcción de un pensamiento crítico-reflexivo.
Computador portátil	Propicia la visualización de la bibliografía (Dossier Digital), elaborar diversos trabajos teóricos/prácticos y analíticos. Facilita navegar sitios web para la profundización de los contenidos.

Videos	Profundizar objetivamente la percepción y visualización del tema, con sentido crítico – reflexivo para su mejor comprensión.
Bibliografía (Dossier Digital)	Fortalecer la capacidad de interpretación de documentos bibliográficos en la comprensión, análisis y profundización de los contenidos que involucren ecuaciones diferenciales y números complejos.

Partiendo desde Nuestra Experiencia

Recordemos un poco nuestro proceso de formación en el ámbito educativo, inicialmente como estudiante de nivel secundario y posteriormente de nivel superior universitario, podemos reflexionar positiva o negativamente sobre diversos conocimientos matemáticos abordados a lo largo de nuestra vida cotidiana. Específicamente, este espacio nos permitirá reflexionar sobre dos aspectos, el primero propiamente sobre el proceso de cómo identificamos un número complejo y el segundo sobre cómo estamos desarrollando la matemática en el Modelo Educativo Sociocomunitario Productivo.

1. *"El concepto de número complejo apareció, en primer lugar, como resultado de la necesidad de sistematizar los cálculos, los matemáticos se vieron con la necesidad de utilizarlos desde épocas relativamente tempranas, inclusive las más sencillas operaciones algebraicas con números reales se salen del marco del campo de los números reales. Es conocido que no toda ecuación algebraica puede ser resuelta con números reales; por consiguiente, es necesario renunciar a la aplicación automática de los métodos de solución establecidos y en cada caso investigar minuciosamente las posibilidades de aplicación de dichos métodos o ampliar el campo de los números reales, de manera que las operaciones algebraicas fundamentales sean siempre aplicables. Tal ampliación es, precisamente, el concepto de número complejo."* (Marín, J. 2014).

Vale la pena entender bien lo que afirma el autor. Ahora, fíjate y resuelve cada una de las siguientes ecuaciones:

$$x+3=0, \qquad 2x+3=0, \qquad x^2-2=0 \qquad x^2+2x+2=0$$

Cuyas soluciones son:

$$x=-3 \qquad x=\frac{-3}{2} \qquad x=\pm\sqrt{2} \qquad x=-1\pm i$$

Resuelve también la siguiente ecuación polinómica:

$$x^5+(1-i)x^4+\left(\frac{1}{5}-i\sqrt{2}\right)x^2-8x+3-\frac{i}{\sqrt{3}}=0$$

Luego de haber resuelto las ecuaciones, responde a las siguientes interrogantes:

- ¿Cómo identificó el número complejo?
- ¿Qué ocurrió con coeficientes complejos?
- ¿Cómo son sus soluciones?
- ¿Aparecen también nuevos tipos de números?
- ¿Qué dificultades tuvimos al resolver la ecuación polinómica? ¿Por qué?

2. Reflexionemos críticamente nuestra experiencia en la práctica pedagógica, alguna vez consciente o inconscientemente nos preguntamos, ¿estamos desarrollando los contenidos matemáticos útiles y pertinentes que responden a las necesidades de las y los estudiantes?

"Existe una fuerte crítica al modelo tradicional de enseñanza de la matemática, en particular, se cuestiona la forma en que se transmiten aprendizajes declarativos abstractos y descontextualizados, conocimientos inertes, poco útiles, escasamente motivacionales y de relevancia social limitada." (Díaz & Hernández, 2002).

Reflexionemos respecto a la cita (Díaz y Hernández, 2002). Luego, expresemos una verdadera experiencia que hayamos vivido con las y los estudiantes y como maestras o maestro de matemática en diferentes contextos.

- ¿Cómo aprendiste las matemáticas en los niveles primario y secundario?
- ¿Qué te motivó incorporarte a la carrera docente en el área de Matemática?
- ¿Qué temas consideras que NO son útiles a las y los estudiantes en su vida cotidiana? ¿Por qué?
- ¿Cómo contextualiza los números complejos con la vida cotidiana?

Tema 1

Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden, Ordinarias Simples y de Orden Superior

Le damos la bienvenida a las y los participantes del Programa de Nivelación Académica y otros lectores que tengan la oportunidad de explorar el presente trabajo, de seguro que servirá como introducción a la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales, cubriendo al mismo tiempo algunas nociones básicas del análisis matemático que resultan imprescindibles para dar los primeros pasos en la teoría de las ecuaciones diferenciales. Ha sido pensado para atender las necesidades de las y los participantes del Programa, aunque se espera que pueda ser útil también en otros contextos.

"Es fácil comprender por qué se presentan tan a menudo ecuaciones diferenciales en los pro*blemas de Física: si $y=f(x)$ es una función que representa una magnitud escalar, entonces su derivada* $\frac{df}{dx}$ *representa la tasa de cambio de y en relación con x. En cualquier fenómeno natural, las variables que aparecen y sus tasas de cambio se relacionan entre sí según los principios básicos que rigen el proceso y, cuando esta relación se expresa mediante símbolos matemáticos, el resultado es habitualmente una ecuación diferencial."* (Grecia, I. & Román, N. 2008).

El conocimiento del presente tema nos ayudarán a entender de mejor manera los fenómenos naturales, ya que las ecuaciones diferenciales aparecen en el estudio de numerosos fenómenos físicos y químicos.

Profundización a partir del diálogo con los autores y el apoyo bibliográfico

"Muchos problemas fundamentales en ciencias, ingeniería y otras áreas como economía, se describen mediante ecuaciones diferenciales. Problemas físicos han motivado la mayor parte de las matemáticas y esto es especialmente cierto cuando se trata de ecuaciones diferenciales". (Olivares, M. 2002)

Es posible encontrar referencias bibliográficas desde los más antiguos y actuales que profundicen los métodos de cálculo a nivel avanzado, pero no discuten algunos aspectos básicos y relativamente involucrados a un Modelo Educativo Socioproductivo, por lo que se recomienda visibilizar problemas cotidianos que se pueden resolver aplicando métodos de resolución de ecuaciones diferenciales.

1. Soluciones de ecuaciones

Aunque no sepamos qué es una ecuación diferencial, estamos familiarizados con el problema de resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones algebraicas, además sabemos lo que se entiende por solución de una ecuación aunque en ecuaciones polinómicas lineales de primer y segundo grado. En las ecuaciones cuadráticas se presentan hasta dos soluciones, ¿verdad?

Por el método que recordamos, resolvamos y verifiquemos con las soluciones, de manera que satisfaga las siguientes ecuaciones:

$$a)\,x^2-5x+6=0 \qquad x_1=\ldots \qquad x_2=\ldots$$
$$b)\,x^2-x+1=0 \qquad x_1=\ldots \qquad x_2=\ldots$$
$$c)\,x^2+x+1=0 \qquad x_1=\ldots \qquad x_2=\ldots$$

Recordemos también los tipos de soluciones que se presentan en las ecuaciones cuadráticas $\boldsymbol{ax}^2+\boldsymbol{bx}+\boldsymbol{c}=0$. Para lo cual, analicemos b^2-4ac (discriminante) de las tres ecuaciones resueltas en el cuadro anterior, considerando:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \qquad b^2-4ac \rightarrow Discri\min ante$$

Luego anotemos y justifiquemos los tipos de soluciones que presentan cada uno de las ecuaciones resueltas de acuerdo al siguiente cuadro:

a) Si $b^2 - 4ac > 0$, las soluciones son:

b) Si $b^2 - 4ac < 0$, las soluciones son:

c) Si $b^3 - 4ac = 0$, las soluciones son:

Ahora bien, para comprender los tipos de soluciones de las ecuaciones diferenciales, consultemos el texto (Espinosa, 2012) ***"Ecuaciones diferenciales"*** (Pág. 16 - 18).

En las demostraciones de las resoluciones, evidenciamos que existe solución implícita, explícita y solución general de una ecuación diferencial ordinaria. Ampliemos lo mencionado con el texto (Spiegel, 1983) ***"Ecuaciones Diferenciales aplicadas"*** (Pág. 11 - 23), luego respondemos las siguientes preguntas:

- ¿En qué tipo de ecuaciones diferenciales se aplica **solución general**?
- ¿Cómo se demuestra la **solución explícita** de una ecuación diferencial?
- ¿De cuántos variables depende la **solución implícita** de una ecuación diferencial?
- ¿Cómo se denomina la **gráfica de la solución general** de una ecuación diferencial de primer orden?

Luego, en el texto (Espinosa, 2012) ***"Ecuaciones diferenciales"*** (Pág. 20), indicamos si las ecuaciones (1 – 5) son lineales o no lineales, así como el orden de cada ecuación diferencial.

2. Ecuaciones diferenciales de separación de variables

Esta vez, iniciamos observando paso a paso el desarrollo del Video: ***"Taller de ecuaciones diferenciales ordinarias"*** (06:15 - 09:35 min.). Terminado el tiempo sugerido, respondemos a las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es el método de solución que se observó?
- ¿Cuál es el ejemplo que utilizó para demostrar el método de solución?
- ¿Qué elementos intervienen en el problema de caída libre?

Es momento de ampliar el método, para lo cual no remitimos al texto (Braun, 1990) ***"Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones"*** (Pág. 19 – 25) y analizamos el desarrollo de los ejemplos. Luego a partir de un ejemplo de la cotidianidad o seleccionando del texto, respondemos las siguientes interrogantes:

- ¿Cuándo una ecuación diferencial es separable?
- ¿Una ecuación diferencial separable será homogénea? ¿Por qué?

Para ampliar los procedimientos de resolución de ecuaciones diferenciales ordinaras con variables separables, le invitamos a analizar e interpretar los desarrollos de los ejemplos en el texto (Tejero & Ruiz, 2002) ***"Ecuaciones diferenciales ordinarias"*** (Pág. 23 - 29). Luego, nuevamente revisamos el texto (Braun, 1990) ***"Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones"*** (Pág. 24) y resolvemos los ejercicios (1 – 9), probamos si son o no separables.

3. Ecuaciones diferenciales de homogéneas

Brevemente reflexionemos sobre nuestra experiencia pedagógica cotidiana, referida a la homogeneidad y la heterogeneidad del que hacer en el espacio pedagógico. Como maestra o maestro, a diario compartimos con un grupo de 10, 20, 30 o 40 estudiantes, ciertos conocimientos o contenidos matemáticos, donde las y los estudiantes vienen con ideas de vida, culturas, opiniones, expectativas, capacidades y necesidades, diferentes y desiguales, ¿verdad?.

Ahora reflexionemos en la siguiente realidad: "A un estudiante perteneciente a los pueblos originarios, otro que vive en un pueblo alejado de la ciudad, a un estudiante que es parte de grupos urbanos marginales, a un estudiante de ciudad, otro estudiante que vive en el campo":

A continuación, en base a la reflexión, responde a las siguientes preguntas:

- ¿Debemos enseñarle lo mismo?
- ¿Podemos enseñar lo mismo?
- ¿Existe una distribución equitativa del conocimiento?
- ¿Por qué sucede esto?
- ¿Cómo hacemos para integrar todo eso en el ambiente pedagógico?

Atender a la diversidad sociocultural en la educación, muchas veces es sinónimo de problema, de dificultad, pero ¿por qué no entenderla como una posibilidad a una nueva realidad, como una oportunidad para ir más allá de lo esperado?

Al respecto: *"Cuando no se tienen en cuenta las diferentes necesidades y ofrecemos a todos lo mismo, no hacemos sino ignorar la diversidad generando aún más desigualdad"* (Sagastizabal, 2006).

Muchas veces se escucha a una maestra o a un maestro decir "Para mí las y los estudiantes son todos iguales" ¿Verdad? Reflexionemos sobre la expresión vertida y a partir de nuestra experiencia pedagógica respondamos a las siguientes preguntas:

- ¿En qué son iguales?
- ¿Qué sentido tiene la homogeneidad en el trabajo educativo? ¿Qué demuestra la heterogeneidad en el trabajo docente?
- ¿Qué hay que integrar en el aula? ¿Integrar genera la homogeneidad?

Analicemos la siguiente definición textual: "*Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden de la forma* $y' = f(x, y)$ *se denomina ecuación diferencial homogénea si la función f es homogénea de grado cero. Las ecuaciones homogéneas se pueden expresar de la forma* $y' = g\frac{y}{x}$ *y al hacer el cambio de variable* $z = \frac{y}{x}$ *la ecuación se reduce a una de variables separadas*" (Sánchez de los Reyes, V.)

Al respecto, ampliemos y consolidemos el grado de homogeneidad de las funciones en el texto (Tejero, & Ruiz, 2002) ***"Ecuaciones diferenciales ordinarias"*** (Pág. 30 - 33). Ahora bien, respondemos las siguientes preguntas y resolvemos la ecuación:

a)

b)

Resolver : $y^2 + x^2\frac{dy}{dx} = xy\frac{dy}{dx}$

Observamos el desarrollo de la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias (edos) en el video ***"Edo homogénea 1"*** (00:01 – 22:23 min.) y ***"Edo homogénea 2".*** (00:01 – 10.58 min.). Luego nos remitimos al texto (Olivares, 2002). ***"Matemáticas III - Ecuaciones Diferenciales"*** (Pág. 6 – 11), en el texto observamos la definición y ejemplos de resolución de ecuaciones con variables separables, también el proceso de resolución de ecuaciones homogéneas. A continuación, conforme lo solicitado, resolvemos los problemas propuestos en (Pág. 11) del texto de referencia.

4. Ecuaciones diferenciales hechas exactas por un factor integrante apropiado

Dentro las ecuaciones diferenciales se distinguen exactas y no exactas, para identificar y diferenciar las que son de las que no lo son, interpretemos los desarrollos en el texto (Tejero, & Ruiz, 2002) ***"Ecuaciones diferenciales ordinarias"*** (Pág. 19 - 21); El texto ilustra dos criterios puntuales que permite identificar la exactitud de una ecuación diferencial. Demuestre la condición necesaria y suficiente de los dos criterios:

Criterios de exactitud

1.

2.

Profundicemos con otros procedimientos de resolución de ecuaciones diferenciales exactas en el texto (Spiegel, 1983) ***"Ecuaciones Diferenciales aplicadas"*** (Pág. 43 - 55). En las páginas señaladas evidenciamos que la o el estudiante puede resolver fácilmente las ecuaciones exactas por un método de inspección conocido como "agrupación de términos", basado en la habilidad de reconocer ciertas diferenciales exactas. Siguiendo el procedimiento de "agrupación de términos", desarrolle la siguiente ecuación:

Por agrupación de términos resuelva $2xydy + (x^2 + \cos y)dy = 0$

Con la finalidad de apropiarse del método de agrupación de términos, escriba cada ecuación en la forma *M dx+N dy= 0.* Luego, pruebe su exactitud y resuelva aquellas ecuaciones que son exactas en los incisos (a – j) del texto (Spiegel, 1983) ***"Ecuaciones Diferenciales aplicadas"*** (Pág. 47).

5. Ecuación diferencial de primer orden lineal

Recordemos un poco sobre las ecuaciones que hemos desarrollado con las y los estudiantes a lo largo de nuestra experiencia y lo abordado en la Unidad de Formación "Fundamentos de álgebra y aplicaciones productivas", normalmente a las ecuaciones donde interviene una sola variable de potencia uno, denominamos ecuaciones lineales o de primer grado, si la variable está elevada al cuadrado, las identificamos expresando ecuaciones de segundo grado o cuadráticas, ¿verdad?

De forma similar ocurre en las ecuaciones diferenciales de primer orden lineal donde la variable aparece bajo el signo de derivada o diferencial. Así: $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ ó $y' = f(x, y)$. Para conocer ampliamente sobre este caso, acudamos al análisis del texto (Braun, 1990). ***"Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones"*** (Pág. 2 - 10). En sus páginas comprenderemos cómo se identifica el orden y el grado de una ecuación diferencial; además, veremos y analizaremos ejemplos desarrollados para encontrar la solución de valor inicial, solución general y solución continua.

Comprendemos que el grado de una ecuación diferencial ordinaria está dada por el exponente del mayor orden de su derivada. Ahora bien, analicemos detenidamente cada una de las ecuaciones y en la columna derecha del siguiente cuadro determinemos el orden y grado:

Ecuación diferencial ordinaria	Orden y grado
$e^{x}\frac{d^{2}y}{dx^{2}}+senx.\frac{dy}{dx}=x$	
$\frac{d^{3}y}{dx^{3}}+2\left(\frac{d^{2}y}{dx^{2}}\right)^{3}+\frac{dy}{dx}=tgx$	Es de 3er. orden y de 1er. grado.
$\frac{dy}{dx}+p(x)y=Q(x)$	
$\left(\frac{d^{3}y}{dx^{3}}\right)^{2}-2\left(\frac{dy}{dx}\right)^{4}+xy=0$	

Profundicemos el contenido del tema analizando las demostraciones de resoluciones de ecuaciones diferenciales de primer orden en el texto (Espinosa, 2012) ***"Ecuaciones diferenciales"*** (Pág. 27 - 37). Es sus páginas encontraremos un resumen de todo el tema; luego, contrastando ambos textos y la experiencia vivida con las y los estudiantes en diferentes contextos y Unidades Educativas, respondamos a las siguientes preguntas:

- ¿Cuál de los dos anteriores textos estudiados, es apropiado para las y los estudiantes en el marco del MESCP?
- ¿Los problemas de aplicación se aproximan a la realidad de los contextos?
- ¿Cuál su opinión con respecto a los ejemplos de ambos textos?

Para concluir el presente tema, nuevamente consultamos el texto (Braun, 1990) ***"Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones"*** (Pág. 9 - 10), luego resolvemos los ejercicios (1 - 7) y de (8 - 14) conforme se solicita para cada grupo de las ecuaciones diferenciales.

Tema 2

Ecuaciones Diferenciales Lineales y de Orden N

En el tema anterior se ha enfatizado en el estudio de las ecuaciones diferenciales de primer orden, sin embargo, hemos identificado de segundo y tercer orden, en el presente tema se van a tratar las ecuaciones diferenciales generales de orden superior.

Comenzaremos dando las nociones fundamentales sobre las ecuaciones diferenciales de orden superior (en particular, las lineales), tales como definiciones básicas, teoremas de existencia y unicidad. Luego se estudiarán las soluciones de las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes y variables, para encontrar soluciones particulares de la ecuación completa; finalmente, las principales aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de segundo orden. Al igual que en el tema anterior, se asumirá que todas las funciones son diferenciables con continuidad hasta el orden que se desee.

Desde que se comenzaron a estudiar las ecuaciones diferenciales ha resultado evidente que es difícil lograr resultados muy generales que permitan obtener las soluciones de un tipo determinado de ecuación. Una excepción a esta carencia de una teoría general para resolver ecuaciones diferenciales se presenta en el estudio de las ecuaciones diferenciales lineales y en particular de las que tienen coeficientes constantes.

Profundización a partir del diálogo con los autores y el apoyo bibliográfico

La mayoría de los textos referidos al tema de ecuaciones diferenciales lineales de orden superior son muy avanzados y teóricos, tal vez no permitan abordar desde la práctica a la teoría en el marco del MESCP. Sin embargo, es interesante detenerse en algunas de las aplicaciones que tienen relación con la vida cotidiana.

En este sentido, es necesario profundizar el tema con los textos propuestos en el Dossier Digital y ampliar más allá de lo sugerido con bibliografías, información electrónica y la experiencia de la o el tutor y compañeras/os participantes.

1. Ecuación diferencial lineal general de orden n

Para comprender las ecuaciones diferenciales y resolver problemas no es conveniente regirse en una estructura matemática impecable, es preciso alcanzar el nivel adecuado, sin pasarse ni quedarse cortos, y en algunas ocasiones, presentar argumentos razonables convenientes.

En el tema anterior se demostró que la ecuación diferencial de primer orden se presentan de la forma $\frac{dy}{dx}+Py=Q$, donde ***P*** y ***Q*** son funciones de ***x*** que podía resolverse exactamente por el uso de un factor integrante. En el presente contenido nos concentraremos en ecuaciones diferenciales lineales de orden superior. Para lo cual, le invitamos a revisar el texto de (Gracia & Román, 2008) ***"Ecuaciones diferenciales"*** (Pág. 19 - 27), en sus páginas se define que la ecuación diferencial de orden ***n*** se puede expresar de dos formas. Identifica y escribe a la forma que pertenece cada ecuación del siguiente cuadro:

Ecuación diferencial de orden n	Forma implícita o explícita, ¿Por qué?
$y^{(n)}(x)=f\left(x,y(x),y'(x),\ldots,y^{(n-1)}(x)\right)$	
$F\left(x,y(x),y'(x),\ldots,y^{(n)}(x)\right)=0$	

Además, precisa algunas conceptualizaciones y resultados sobre dependencia e independencia lineal de funciones, antes de tratar el estudio de las soluciones de ecuaciones diferenciales lineales de orden superior; a partir de ello, explique algunas condiciones para garantizar la independencia y dependencia lineal de funciones:

a) Independencia lineal de funciones

b) Dependencia lineal de funciones

Al respecto, profundicemos con la interpretación de definiciones, desarrollo de ejemplos ilustrativos, teoremas fundamentales y demostraciones, acudiendo al texto (Spiegel, 1983). ***"Ecuaciones Diferenciales aplicadas"*** (Pág. 167 - 171). Terminada la actividad, encontramos las soluciones generales de cada una de las siguientes ecuaciones y justifiquemos sus resultados:

a) $(D^2+2D-3)y=0$

b) $(D^3-3D^2)y=0$

c) $(D^2-2D+5)y=0$

Luego, de acuerdo a las soluciones encontradas en el cuadro anterior y la lectura realizada, respondemos a las siguientes preguntas:

a) ¿Cómo encontramos la solución complementaria?
b) ¿Cómo encontramos una solución particular?

a)

b)

2. Existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones lineales

Como en el caso general, las ecuaciones diferenciales lineales de orden superior no siempre pueden ser resueltas explícitamente en términos de funciones elementales conocidas, es posible que existan una, dos, tres o incluso un número infinito de soluciones. Para comprender sobre este contenido interpretemos las demostraciones en el texto (Braun, 1990). ***"Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones"*** (Pág. 67 - 78). A partir de la interpretación del teorema de existencia y unicidad, también los ejemplos desarrollados, respondamos a las siguientes preguntas:

- ¿Cómo es posible saber si el problema de valores iniciales $\frac{dy}{dx} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$ tiene realmente solución, si no se la puede exhibir?
- Cómo puede saberse si $\frac{dy}{dx} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$ tiene una solución única y (t)?
- ¿Qué sentido merece determinar si $\frac{dy}{dx} = f(t, y) \quad y(t_0) = y_0$ tiene una solución única si no es posible exhibirla explícitamente?

a)

b)

c)

El teorema de existencia y unicidad nos indica cuándo una ecuación diferencial de primer orden tiene una única solución, dada esta definición ampliemos la interpretación de los desarrollos en el texto (Gracia & Román, 2008) ***"Ecuaciones diferenciales"*** (Pág. 13 - 16). El teorema de Picard, garantiza la existencia y unicidad de la solución de un problema de valor inicial; de acuerdo a los procedimientos aplicados en ambos textos, desarrollamos la siguiente ecuación diferencial:

Hallar los valores de ***a*** y ***b*** para los cuales el teorema de existencia y unicidad garantiza que el problema de valor inicial tiene solución única.

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x}{y} \\ y(a) = b \end{cases}$$

3. Ecuaciones lineales con coeficientes constantes

Haciendo énfasis en el coeficiente, recordemos los elementos de que consta un término algebraico y los ubicamos en la siguiente imagen:

$$-5y^{3}$$

Ahora bien, de acuerdo al análisis de los elementos de un término algebraico, respondemos a las siguientes preguntas:

- ¿Qué significa el coeficiente en un término algebraico?
- ¿Cuál será la diferencia entre coeficiente constante y no constante?
- ¿Cómo puedes demostrar que un coeficiente es constante en un proceso algebraico?

Con este antecedente, comencemos el estudio de las ecuaciones diferenciales lineales (de orden n) con coeficientes constantes, acudiendo al análisis del texto (Escobar, s. f.) ***"Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones en Maple"*** (Pág. 101 - 106). Se refiere al caso de las ecuaciones homogéneas de segundo orden y coeficientes constantes donde: $ay''+by'+cy=0$ (1), tiene por solución una función exponencial de la forma: $y=me^{mx}$ derivando dos veces se tiene $y'=me^{mx}$ $y''=me^{mx}$, sustituyendo en (1) se obtiene: $am^2+bm+c=0$, la cual denominamos ecuación característica o ecuación auxiliar de la ecuación diferencial que permite distinguir los siguientes tres casos distintos y posibles:

Caso 1: Dos raíces reales y distintas

Caso 2: Dos raíces reales e iguales

Caso 3: Dos raíces complejas conjugadas

A partir de la ecuación característica o ecuación auxiliar, demostremos el carácter de las raíces y la solución general en las ecuaciones del siguiente cuadro:

Ecuación diferencial	Ecuación característica	Solución
$y''+2y'+y=0$		$y=e^{mx}$
$y''-3y'+2y=0$	$m^2-3m+2=0$ $(m-2)(m-1)=0$ $y_1=2,\ \ y_2=1$ Las raíces son reales y distintas	$y=e^{mx}$ Sol. $y_H=c_1e^{2x}+Ce^{x}$
$y''+y'+y=0$		$y=e^{mx}$

Ampliemos la interpretación de los desarrollos de las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de orden n en el texto (Sánchez, s. f.) ***"Elementos de Ecuaciones Diferenciales Ordinaria"*** (Pág. 29 - 31). Demostremos el análisis de la lectura resolviendo el ejercicio 1 de los incisos "a – f" de la pág. 32 (Tomar en cuenta que una ecuación de tercer grado tiene tres raíces).

4. Ecuaciones lineales con coeficientes variables

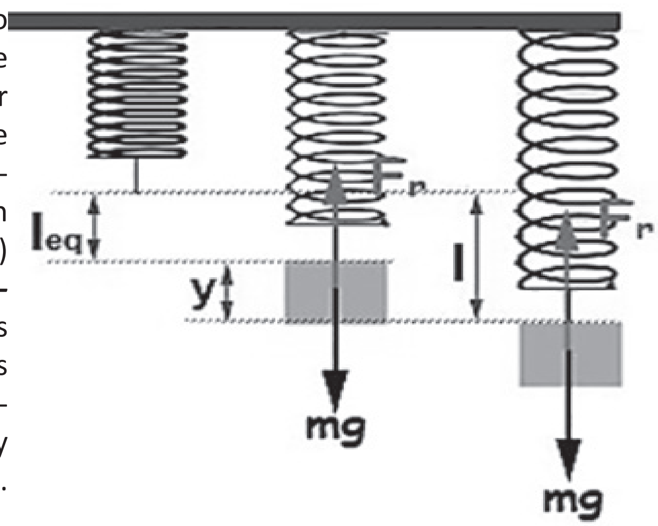
Manteniendo los grupos comunitarios, reflexionemos sobre ecuaciones con coeficientes variables, que a simple juicio pareciera que es contrario del contenido anterior desarrollado. Para asegurar la idea sobre el contenido del tema, analicemos el texto (Spiegel, 1983). ***"Ecuaciones Diferenciales aplicadas"*** (Pág. 215 - 218). El autor afirma que algunas ecuaciones diferenciales con coeficientes variables pueden ser resueltas al transformarlas en ecuaciones diferenciales lineales homogéneas con coeficientes constantes.

Siguiendo los procedimientos del texto (Spiegel, 1983) ***"Ecuaciones Diferenciales aplicadas",*** desarrollemos una solución particular de $y''+2y'+3y=6x+1$, considerando la forma $y_p=Ax+B$, cuya solución es $y_p=2x-1$.

5. Aplicaciones

De acuerdo a las demostraciones teóricas se evidencian una serie de aplicaciones de la ecuaciones diferenciales, ya sean estas en problemas físicos, químicos, biológico, ingeniería civil y otros campos. Para acercarnos a la realidad observemos con bastante atención el video titulado: ***"Cable de un puente colgante"*** (00:01 – 13:32 min.). Paralelamente tomamos apuntes y respondemos a las preguntas:

- ¿Qué tipo de ecuaciones diferenciales aplicó en el problema?
- ¿Qué forma geométrica presenta el gráfico del problema?
- ¿Qué elementos físicos intervino en el desarrollo del problema?



Si observamos el contexto social, de seguro que evidenciamos muchas aplicaciones de ecuaciones diferenciales ya sean de primer orden o de orden n, sin embargo a simple vista no lo distinguimos; para comprender mejor acudamos a la interpretación de aplicaciones en el texto (Escobar, s. f.) ***"Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones en Maple"*** (Pág. 101 - 106). Una de las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales que demuestra es "El resorte vibrante, movimiento armónico simple, amortiguado y forzado", por lo cual observamos la imagen.

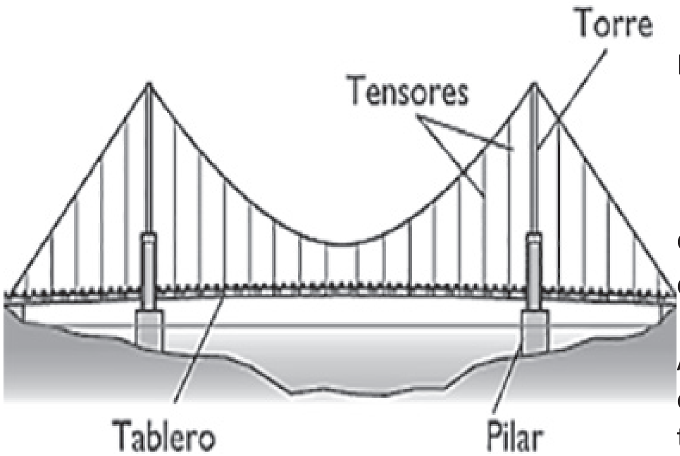
Nuestro propósito es discutir el movimiento del peso en este y similares casos, La ley que gobierna esta fuerza es la Ley de Hooke "La fuerza ejercida por un resorte, tendiente a restaurar el peso W a la posición de equilibrio, es proporcional a la distancia de W a la posición de equilibrio". (Algunas veces se abrevia como la fuerza es proporcional al alargamiento).

El comportamiento de muchos sistemas en Física conduce a ecuaciones lineales, en el siguiente cuadro se presenta ecuaciones diferenciales que corresponden a osciladores armónicos, analice cada uno y responde si es verdad o falso, justifique la respuesta.

Osciladores armónicos	Ecuación	Verdad/Falso ¿Por qué?
Oscilador armónico simple	$my'' + ky = 0$	
Oscilador armónico amortiguado	$my'' + \beta y' + ky = 0$	
Oscilador armónico forzado	$my'' + \beta y' + ky = F(t)$	

Profundicemos analizando ejemplos ilustrativos a la aplicación de ecuaciones diferenciales de orden ***n*** en el texto (Spiegel, 1983) ***"Ecuaciones Diferenciales aplicadas"*** (Pág. 223 - 257). Se observa la aplicación de las ecuaciones diferenciales en movimiento vibratorio de sistemas mecánicos, problemas de circuitos eléctricos, y una serie de problemas misceláneos.

En la página (111 – 115) del mismo texto se demuestra que un cable flexible soporta un puente uniforme donde se aplican las ecuaciones diferenciales, veamos el siguiente desarrollo:



Descomponemos la tensión:

$T.sen(\alpha) = W(peso)$ y $T.cos(\alpha) = FuerzaHorizontal(H)$. Derivamos dos veces $\frac{dy}{dx} = \frac{W}{H}$ obtenemos $y'' = \frac{1}{H} \cdot \frac{dW}{dX}$ donde $\frac{dW}{dX}$ es el peso.

Así en la vida cotidiana aparecen diversos ejemplos de vibraciones mecánicas: automóviles al circular por suelo irregular, obras arquitectónicas sometidas a fuerzas exteriores, problemas de aeronáutica. etc. De los problemas misceláneos del texto (Spiegel, 1983) ***"Ecuaciones Diferenciales aplicadas"*** (Pág. 250 – 258), seleccione, grafique y desarrolle dos problemas (los más apropiados) que pueden presentarse en nuestros contextos:

Tema 3
Números Complejos

“El número imaginario es un recurso sutil y maravilloso del espíritu divino, casi un anfibio entre el ser y el no ser.”

Leibniz

En la Unidad de Formación de Fundamentos de Álgebra y Aplicaciones Productivas, propiamente en el tema de ecuaciones cuadráticas se han abordado implícitamente los números complejos (números imaginarios), como resultado de la imposibilidad de extraer raíces cuadradas negativas $\sqrt{-9}$, $\sqrt{-1}=i$ por lo que en este tema haremos una revisión de lo ya visto en dichos momentos.

Es importante mencionar que en los números complejos no existe una relación de orden, es decir, las conocidas relaciones de orden que se usan en el caso de los números reales no son aplicables, por ejemplo, haciendo uso de números reales podemos afirmar que 3 es menor que 8 ó 11 es mayor que - 4 ¿Verdad?; pero al emplear números complejos no tiene sentido afirmar que 3+i menor que 4+2i.

“Sobre el origen de los números complejos, ecuaciones tales como $x^2=2$, que no tienen solución en el campo de los números racionales, dieron pie a la introducción de los números reales: $x=\pm\sqrt{2}$. Pero aún en el campo de los números reales no es insuficiente para resolver algún tipo de ecuaciones cuadráticas. Así $x^2=-1$.

“Esta ecuación no tiene solución en el campo de los números reales, ya que no hay ningún número que al elevarlo al cuadrado dé un número negativo. Para resolver este tipo de ecuaciones se introducen los números complejos.” (Gálvez, & Otros. 1996).

Profundización a partir del diálogo con los autores y el apoyo bibliográfico

Es ineludible el diálogo con los autores desde la práctica, que leer cien veces un texto bibliográfico; sin embargo, en algunos temas de Matemática es algo difícil este diálogo, pero no imposible. En este entendido, las y los participantes del Programa, en cada contexto de trabajo, asumimos el compromiso de investigar y tomar contacto directo con las y los entendidos del tema, a través de las prácticas ancestrales y consolidar dichos conocimientos propios con lecturas analíticas bibliográficas que tengan mínimamente relación con el MESCP.

1. Propiedades algebraicas

Previamente organizados en equipos comunitarios de estudio, de acuerdo a nuestra experiencia pedagógica o como estudiante del que fuimos en su momento, revisemos las diversas propiedades del conjunto de los números reales y a continuación demostramos con ejemplos prácticos lo siguiente:

- Propiedades de los números naturales
- Propiedades de los números enteros
- Propiedades de los números racionales

a)

b)

c)

Ahora bien, en base a las propiedades que hemos demostrado, iniciamos el estudio analítico de las propiedades algebraicas de los números complejos, acudiendo a la consulta bibliográfica del texto (Molero, Salvador, Menarquez. & Garmendia, s. f.) ***"Análisis matemático para ingeniería, Números complejos, Cap. 1"*** (Pág. 21 - 24). Las páginas indicadas refieren que, varias propiedades algebraicas de la suma y del producto de números complejos coinciden con las de los números reales. Luego, interpretamos y explicamos las propiedades en los recuadros de la derecha.

Propiedades algebraicas	Representación simbólica	Interpretación
Asociativa de la suma y del producto	$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$ $(z_1.z_2).z_3=z_1.(z_2.z_3)$ $para.todo: z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$	
Conmutativa de la suma y del producto	$z_1+z_2=z_2+z_1$ $z_1.z_2=z_2.z_1$ $para.todo: z_1, z_2 \in \mathbb{C}$	

Distributiva del producto	$z_1.(z_2+z_3)=z_1.z_2+z_1.z_3$ $para.todo: z_1,z_2,z_3 \in \mathbb{C}$	
Existencia de elemento inverso	$z^{-1}=\frac{1}{z}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}$ $tal.que: zz^{-1}=1$	

Ampliemos el tema interpretando las demostraciones de propiedades y sus respectivos desarrollos en el texto (Churchill & Brown, 1992) ***"Variable compleja y aplicaciones"*** (Pág. 2 - 10), comparando las propiedades algebraicas de ésta lectura y el texto anterior, toma en cuenta que $i^2=-1$ y desarrollemos los ejercicios: 1.2 (a – c) y 1.3 (a – c) del (Molero, Salvador, Menarquez. & Garmendia, s.f.) ***"Análisis matemático para ingeniería, Números complejos, Cap. 1"*** (Pág. 23 - 24).

1.2 (a – c)

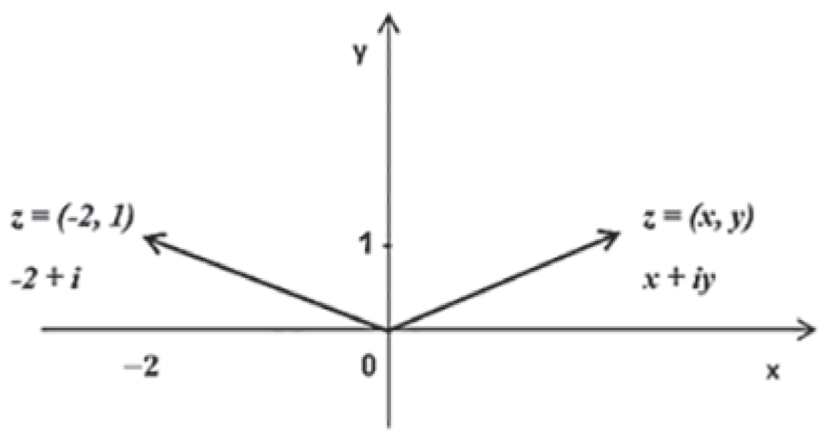
1.3 (a – d)

2. Interpretación geométrica

Antes de ingresar con el análisis bibliográfico, para acercarnos a la interpretación geométrica de los números complejos, observemos el video titulado ***"Los números complejos y su importancia"*** (01:30 – 11:40 min.). Si no hemos captado la explicación en su totalidad, observemos nuevamente y respondemos a las siguientes preguntas:

- ¿Qué operaciones realizó con los puntos sobre la recta real?
- ¿Cómo se logró que el valor de $\sqrt{-1}=i$?
- ¿En qué recta del plano se escriben los números: i, 2i, 3i, 4i, -i, -2i, -3i, -4i, …?

En base al video observado complementemos sobre la representación e interpretación geométrica de los números complejos analizando el texto (Churchill, & Brown, 1992) ***“Variable compleja y aplicaciones”*** (Pág. 7 - 10), donde nos dice que: *“Un número complejo se define como un par ordenado de números reales, que podemos representar geométricamente al número complejo* ***z = (x,y) = x + iy*** *a través del punto (x,y) en el plano R2. Por ejemplo el número* ***(-2+i)*** *viene representado por el punto* ***(-2,1)****”*.



Cuando se utiliza efectos de representar geométricamente los números ***z = x + iy*** la recta o el vector que va desde el origen hasta el punto ***z = (x,y)*** es el número complejo, el plano xy se llama plano complejo o plano z. El eje x se llama eje real y el eje y se llama eje imaginario. Ampliemos el análisis de la representación e interpretación geométrica de los números reales en el texto (Marín, 2014) ***“Teorías de funciones de variable compleja”*** (Pág. 16 - 20). Luego en tres planos distintos, representen los siguientes números complejos:

$1.\ a = 2 + i \qquad b = 0 + 2i \qquad c = -2 + 2i$

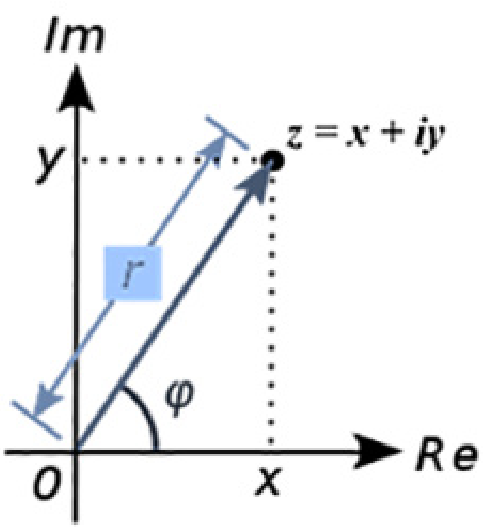
$2.\ a = 2 + 3i \qquad b = -1 + 2i \qquad c = -3 - 2i \qquad d = 5 + i \qquad e = 4 - 3i$

$3.\ a = 2 + i \qquad b = 2 - i$

3. Forma estándar, forma polar, forma exponencial y raíces

En el acápite anterior hemos representado los números complejos en el plano z, de acuerdo a la bibliografía adjunta, existen otras formas de representar dichos complejos, iniciemos analizando caso por caso en el texto (Churchill, & Brown, 1992) ***"Variable compleja y aplicaciones"*** (Pág. 14 - 23). En las páginas citadas, encontraremos diferentes formas de representar los números complejos, entre ellos la forma polar o trigonométrica, forma exponencial, potencias y raíces de números complejos.

De acuerdo a la siguiente imagen, iniciemos interpretando que r y ω coordenadas polares del punto (x,y) que corresponde a un número complejo no nulo $z = x + iy$. Como $x = r\cos\omega$ e $y = r\,\mathrm{sen}\,\omega$. De donde se obtiene la forma trigonométrica $z = r(\cos\omega + i\,\mathrm{sen}\,\omega)$.



Del análisis se obtiene que: r es el módulo del número complejo z y el ángulo polar ω se denomina argumento, se representa con la notación $\omega = Arg\ z$. Hecha las aclaraciones respondemos a las siguientes preguntas.

a) ¿El módulo de un complejo puede ser un número real negativo? ¿Por qué?

b) ¿Geométricamente qué representa el argumento de un número complejo?

c) ¿En qué se mide el argumento ω?

Ampliemos y complementemos otras formas de representación de números complejos en el texto: (Molero, Salvador, Menarquez & Garmendia, s. f.) ***"Análisis matemático para ingeniería, Números complejos, Cap. 1"*** (Pág. 30 - 43). Sobre la base de las diferentes formas de representación de números complejos estudiadas en ambos textos, completemos la siguiente tabla:

Cartesiana	Estándar o binómica	Polar o Trigonométrica
(1,-1)		
	$\sqrt{3}+i$	$2\cos\frac{\pi}{6}+i\ sen\frac{\pi}{6}$
		$2\cos\frac{\pi}{3}+i\ sen\frac{\pi}{3}$

De acuerdo a los textos consultados aclaran que el módulo y el argumento del número complejo queda expresado por:

Módulo: $r=|x|=\sqrt{x^2+y^2}\geq 0$

Argumento: $\varphi=Arg\,z=arctan2cos\frac{y}{x}+2\pi n$ (I y IV) cuadrantes

$\varphi=Arg\,z=arctan2cos\frac{y}{x}+2(n+1)\pi$ (II y III) cuadrantes

Ahora bien, aplicando las fórmulas o expresiones indicadas, calculamos el módulo y el argumento de los siguientes números complejos:

$\sqrt{3}-i$

- 2-2i

$1-\sqrt{3}i$

-4i

Tomando en cuenta las definiciones de potencias y raíces de números complejos interpretadas en el texto (Molero, Salvador, Menarquez & Garmendia, s. f.) ***"Análisis matemático para ingeniería, Números complejos, Cap. 1"*** (Pág. 30 - 43). Resolvemos las siguientes ecuaciones obteniendo las raíces reales y complejas.

a) $x^2= -1$

b) $x^3=-8$

c) $x^3=-8$

d) $x^4+16=0$

4. Regiones en el plano complejo

Recordemos el sistema de ejes coordenadas rectangulares (plano cartesiano) desarrollado en sistemas de ecuaciones lineales y trigonometría. Asimismo, retomando la estructura de la representación geométrica de los números complejos en el contenido 2, deducimos que el plano complejo está formado por la intersección del eje horizontal denominado eje real y el eje vertical denominado eje imaginario de la siguiente forma:

Para establecer definiciones de las regiones que pueden presentarse en el plano complejo, analizamos el sitio web (Duarte, s. f.) ***"Álgebra de Números Complejos"*** (Pág. 15 – 18). Las páginas indicadas ilustran que el conjunto de puntos de los números complejos forman un círculo en el plano complejo y se presentan los siguientes casos:

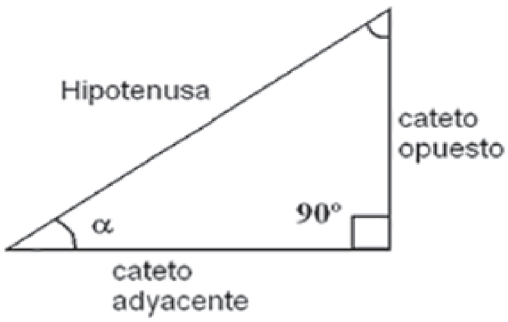
La vecindad o entorno ε, entorno punteado o perforado, punto de acumulación (interior, exterior y frontera), conjunto abierto conexo y no conexo, conjunto ***S*** acotado y no acotado.

Ampliemos el análisis de las regiones en el plano complejo consultando el texto (Churchill, & Brown, 1992) ***"Variable compleja y aplicaciones"*** (Pág. 27 - 28). Una vez concluida las comparamos de definiciones y ejemplos de ambos textos, demostremos gráficamente las regiones solicitadas en la siguiente tabla:

Regiones en el plano	Representación gráfica
Vecindad o entorno ε del número complejo z_0	
Entorno punteado o perforado del número complejo z_0	
Punto interior, exterior y frontera al conjunto S.	

5. Funciones trascendentes básicas

Para ingresar a las funciones trascendentales básicas de números complejos, revisemos nuestra experiencia sobre las funciones trigonométricas abordadas en la U. F. Trigonometría (Relaciones métricas en armonía con el cosmos).



Realizada la actividad, a partir del siguiente triángulo, establecemos las seis razones o funciones trigonométricas del ángulo α.

Sen α

Cos α

Tan α

Cotg α

Sec α

Csec α

Sobre la base de la tarea realizada y con el fin de asegurar nuestro nivel de partida con las funciones trascendentales básicas, esta vez nos remitimos al texto (Molero & Otros, s.f.) ***"Análisis matemático para Ingeniería, Funciones Complejas. Cap. 2"*** (Pág. 61 - 64); del mismo modo revisamos el texto (González, 2003) ***"Variable Compleja"*** (Pág. 7 - 11), ambos textos hacen referencia de las definiciones, propiedades y desarrollos de funciones exponenciales, trigonométricas, logarítmica, hiperbólicas y potencias; sin embargo las más importantes y elementales son las funciones trigonométricas y las funciones exponenciales. A continuación, respondemos a las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es la relación de las funciones trigonométricas de la tarea anterior con las funciones trigonométricas complejas?
- ¿La función logarítmica será igual a la función inversa de la función exponencial?
- ¿Cuál es la fórmula de Euler que define la función exponencial compleja?
- ¿Cuál es la diferencia entre la función exponencial real y compleja?

Una vez respondida a las preguntas de la tarea anterior, en ambos textos identificamos las propiedades de funciones trascendentes y completamos la siguiente tabla:

Propiedades de funciones trascendentales básicas	
Exponencial: Para todo $z, w \in C$	Trigonométrica: Para todo $z, w \in C$

Tema 4

Integración Compleja

“El camino más corto entre dos verdades del análisis real pasa con frecuencia por el análisis complejo”.

Jaques Hadamard

La integración compleja es una de las teorías de la matemática en la que se trabaja con énfasis debido a su accesibilidad en las aplicaciones con las integrales reales y algunas propiedades básicas de las funciones analíticas, el tema es un tanto teórico, pero los resultados que presentaremos son esenciales en las aplicaciones que estudiaremos en el presente tema.

Para la maestra o el maestro este tema es de gran utilidad, para que pueda orientar sobre la integración compleja, preparando a las y los estudiantes para su estudio universitario en las carreras de ingeniería y áreas afines.

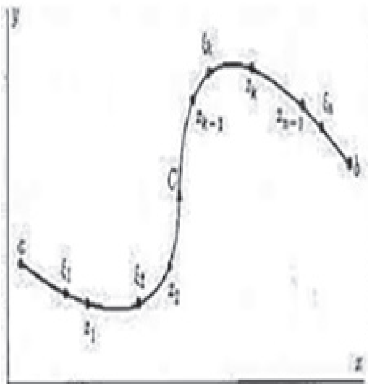
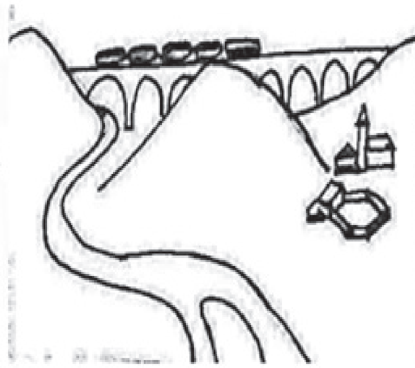
El estudiante al concluir el bachillerato humanístico o técnico, es posible que no sienta la necesidad de aplicabilidad en la vida cotidiana, sin embargo en los estudios universitarios los temas de integrales es muy común en la ingeniería y en la matemática en general; en este sentido el tema se convierte en una herramienta y base de conocimiento para él o la estudiante que cursará estudios universitarios y en Institutos tecnológicos.

Profundización a partir del diálogo con los autores y el apoyo bibliográfico

En el estudio de la integración compleja, no sólo debe interesar explicar definiciones, demostrar propiedades y desarrollar problemas a través de las fórmulas; más al contrario sentir la importancia y la aplicabilidad en la vida cotidiana.

1. Integración de líneas en el plano

En la vida cotidiana consciente o inconscientemente a diario enfrentamos con una serie de líneas. Pero para tener una idea sobre las líneas en el plano, observemos e interpretemos los siguientes gráficos:


Ahora bien, hemos identificado cada gráfico, ¿verdad? A partir de nuestra percepción, respondemos a las siguientes preguntas:

a) ¿Qué tipo de líneas identificaste en el gráfico de la izquierda?

b) ¿Qué representa el gráfico que se encuentra en medio? ¿Qué tipo de líneas se divisan?

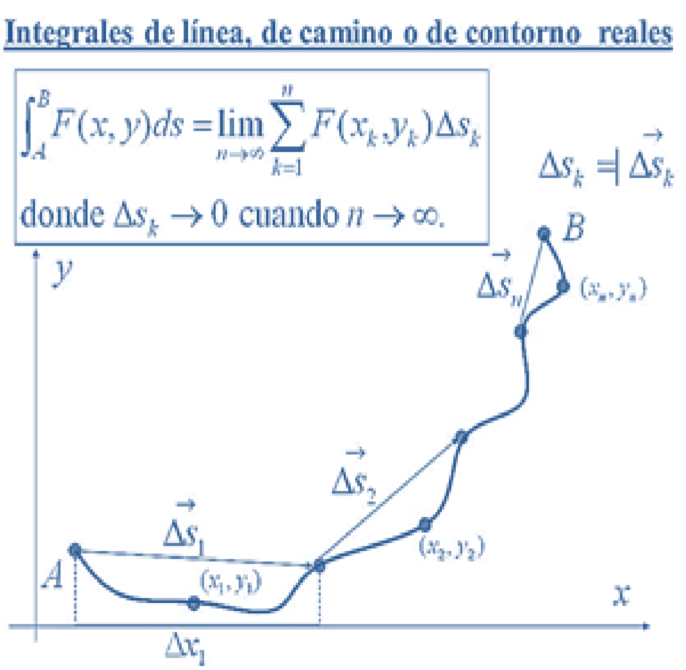
c) ¿Qué explicación harías sobre el gráfico de la derecha? ¿Qué tipo de líneas se observan?

De acuerdo a las respuestas vertidas respecto a los tipos de líneas y dada la importancia del tema de integración compleja, iniciamos estudiando la integración de línea en el texto (Derrick, 1987) ***“Variable compleja con aplicaciones”*** (Pág. 61 - 69), en el caso de una integral compleja se integra a lo largo de una curva en el plano complejo, denominado trayectoria de integración, además, un arco en el plano es cualquier conjunto de puntos que pueden describirse en forma paramétrica.

A continuación tracemos un plano complejo para cada tarea y representemos gráficamente los siguientes arcos y curvas:

- Arco simple.
- Arco simple que se autointersecta.
- Curva de Jordan.
- Curva cerrada que se autointersecta.

2. Integración de contorno y teorema de Green



Describimos y analizamos las demostraciones gráficas y analíticas de integrales de contorno en el texto (Alvarado, 2008) ***"Señales y Sistemas. Fundamentos Matemáticos"*** (Pág. 72 - 76), luego describimos el siguiente gráfico:

El gráfico demuestra que una función compleja es continua en todos los puntos de una curva simple de longitud finita que une a todos los puntos ***A*** y ***B***. La curva se subdivide en n segmentos a través de los puntos ***$(A,(x_1,y_1),(x_1,y_1),(x_1,y_1)=B$*** con esta subdivisión se demuestra una suma de integración.

Luego en el plano complejo, grafique las siguientes deformaciones de contornos:

- Simplemente conexo = Un contorno y cero agujero
- Doblemente conexo = Dos contornos y un agujero
- Triplemente conexo = Tres contornos y dos agujeros

Completamos el teorema de Green en el texto (Derrick, 1987) ***"Variable compleja con aplicaciones"*** (Pág. 71 - 75), se refiere que será fácil probar que una integral de línea a lo largo de una curva de Jordan spp es cero, siempre y cuando se suponga que la derivada de la función analítica es continua en el interior de la curva de Jordan spp. Ahora respondemos a las siguientes preguntas:

- ¿Qué entendemos por una curva cerrada simple orientada positivamente?
- ¿Cómo distinguimos entre una y otra orientación?
- ¿Qué hacer para privilegiar y reconocer una de las dos?

Utilizando el teorema de Green, calcular la integral curvilínea $\phi_{\gamma}\left(\mathbf{x}^2+\mathbf{x}^2\mathbf{y}\right)\mathbf{dx}+3\mathbf{x}^2\mathbf{y}\,\mathbf{dy}$ donde γ es la curva cerrada determinado por $y=x^2$, $y^2=x$.

3. La fórmula integral de Cauchy y su extensión

Para interpretar analíticamente la fórmula integral de Cauchy, describimos las demostraciones en los textos (González, 2003) ***"Variable Compleja"*** (Pág. 27 - 30) y (Alvarado, 2008) ***"Señales y Sistemas. Fundamentos Matemáticos"*** (Pág. 80 - 83), los cuales demuestran la fórmula integral de Cauchy que surge a partir de una función analítica en una región específica, sea ésta una curva cerrada simple a trozos.

Una consecuencia importante de la fórmula integral de Cauchy es "si una función es analítica en un punto, existen sus derivadas en ese punto y éstas son también funciones analíticas". Ahora realizamos las tareas:

- ¿Cuáles son las DOS consecuencias para la extensión de la fórmula de Cauchy?
- Interpretemos la fórmula: $\forall z_0 \in I, \quad f(z_0) = \frac{1}{2\eth i}\int_c \frac{f(z)}{z - z_0}dz$

a) Consecuencia 1

Consecuencia 2

b)

Para concluir este acápite, de acuerdo a los procedimientos demostrados en ambos textos representamos gráficamente en el plano complejo y calculamos la $\phi_\gamma \frac{dz}{z^2 + 8z}dz$, donde $\gamma : [\![z]\!] = 1$

4. El teorema de los residuos y aplicaciones

En este apartado estudiaremos uno de los logros más impresionantes y útiles de la teoría de funciones de variable compleja, nos referimos al teorema de residuos y sus aplicaciones, para lo cual revisemos el texto (Marín, 2014) ***“Teorías de funciones de variable compleja”*** (Pág. 187 a 211). En las páginas revisadas encontraremos diversas fórmulas para calcular los residuos de una función analítica, lo interesante es que ilustra con gráficos como las siguientes:

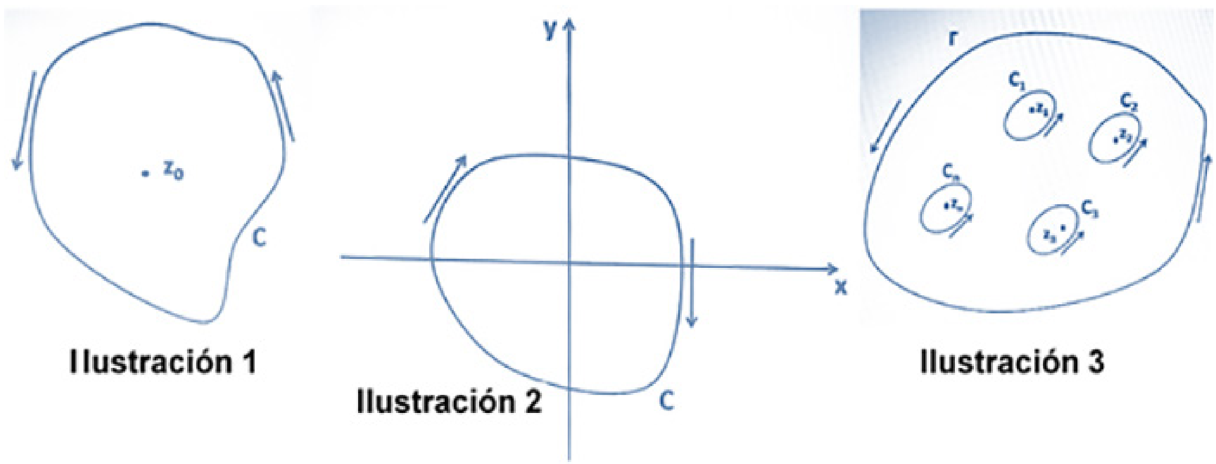


Ilustración 1 Ilustración 2 Ilustración 3

Identifiquemos cada uno de las imágenes y respondemos a las siguientes preguntas:

- ¿Cuál de las imágenes representa al teorema fundamental de residuos?
- ¿Cuál de las imágenes representa al residuo en un punto singular aislado?
- ¿Cuál de las imágenes representa al residuo en el infinito?

Ahora pasamos a identificar las siguientes fórmulas y respondemos a las preguntas:

$$Res\left[f(z), z_0\right] = a_{-1} \qquad Res\left[f(z), z_0\right] = \frac{f_1(z_0)}{f_2'(z_0)} \qquad Res\left[f(z), \infty\right] = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-} f(z)\,dz \equiv a_{-1}$$

- ¿Cuál es la fórmula para calcular el residuo en un punto singular aislado?

- ¿Cuál es la fórmula para calcular el residuo en un polo simple?
- ¿Cuál de la fórmula para calcular el residuo en el infinito?

Al analizar e interpretar los gráficos y desarrollos de fórmulas nos damos de cuenta, que algunas definiciones simples y teoremas de residuos nos ofrecen amplias posibilidades para el cálculo de integrales, tanto de variable compleja como de variable real. Profundicemos el contenido del tema en el texto (Ivorra, s. f.) ***"Funciones de variable compleja con aplicaciones a la teoría de números"*** (Pág. 217 - 235).

Los textos anteriores puntualizan la importancia del uso de los residuos para el cálculo de integrales de contorno en el plano complejo, como también la gran utilidad práctica del teorema de residuo que radica en que en muchas ocasiones es más fácil calcular directamente los residuos de una función en los puntos singulares contenidos en un dominio, que por métodos del análisis de la variable real resultan difíciles, voluminosos y complicados.

Para concluir el tema, apliquemos las teorías y el teorema fundamental de residuos, resolviendo las siguientes funciones e integrales:

1. Calcular los residuos de las siguientes funciones en los puntos z=a

$$a)\ \frac{x^3+1}{(z+2)^2(z-3)}; \qquad a=3, \quad a=-2$$

$$b)\ \frac{\cos z}{x^3(z+4)}; \qquad a=0$$

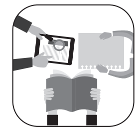
$$c)\ \frac{z^4+2}{x^2+16}; \qquad a=\infty$$

2. Calcular con la ayuda de residuos las siguientes integrales:

$$a)\int_{|z|=1}\frac{e^z}{z}dz$$

$$b)\int_{|z|=2}\frac{\sin zdz}{(z+1)^2(z-i)}$$

Orientaciones para la Sesión de Concreción



La sesione de concreción permiten a las y los participantes poner en práctica los conocimientos teóricos y prácticos abordados durante las sesiones presenciales y de autoformación, a través de la puesta en acción de un trabajo consciente y reflexivo de planificaciones de desarrollo curricular en el marco del Modelo Educativo Sociocomunitario

Para la consolidación de este proceso requiere tomar en cuenta las siguientes etapas:

1. **Autoformación para profundizar las lecturas complementarias.**

   La concretización del proceso de autoformación y profundización corresponde a que cada participante amplíe analizando con mucha atención los diferentes materiales digitales y audiovisuales proporcionados en las sesiones presenciales. Se recomienda considerar las lecturas de profundización que le presentamos en anexos.

2. **Trabajo con las y los estudiantes para articular con el desarrollo curricular y relacionarse e involucrarse con el contexto.**

   La maestra o maestro, para concretizar los temas de "Ecuaciones diferenciales y Variable Compleja" abordados en sesiones presenciales, debe elaborar una propuesta debidamente justificada y con el respectivo análisis **escrito** sobre la Incorporación al Diseño Curricular Regionalizado en 6to. año de Educación Secundaria Comunitaria Productiva, articulados con los objetivos del Proyecto Socioproductivo de la Unidad Educativa y los Momentos Metodológicos que reflejen la transformación educativa en el marco del Modelo Educativo Sociocomunitario.

Para lograr esta proposición, se recomienda realizar puntualmente las siguientes actividades:

a) Solicitar a la Comisión Pedagógica de la Unidad Educativa una participación activa en la elaboración el Plan de Desarrollo Curricular Diversificado y Regionalizado.

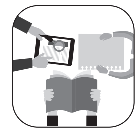
b) Sugerir la inserción de "Ecuaciones Diferenciales y Variable Compleja" en el 6to. año de Educación Secundaria Comunitaria Productiva. Esta solicitud debe tener su debido respaldo a partir de un análisis y justificación escritos acerca del cómo, por qué y para qué se haría la inclusión de esta Unidad de Formación en el currículum regionalizado.

Como trabajo complementario de concreción la o el maestro deberá realizar lo siguiente:

a) Realizar una investigación documental sobre problemas cotidianos, los cuales requieran su representación en modelos de ecuaciones diferenciales. Los problemas cotidianos pueden ir desde los relacionados con la salud, por ejemplo, la forma en que se propagó el virus de la influenza H1N1 en nuestro país.

Sistematice su experiencia vivida en los diferentes momentos de la implementación del PDC, asimismo puntualice los logros, dificultades y sugerencias para considerar en el momento de la socialización de las evidencias.

Orientaciones para la Sesión de Socialización



El momento de la socialización es de vital importancia, porque permiten evidenciar de manera pública la concreción en aula y la apropiación pertinente de los contenidos teóricos y prácticos abordados durante todo el proceso formativo.

Para la valoración cualitativa y cuantitativa, la o el tutor a cargo deberá realizar la evaluación de la Unidad de Formación "Ecuaciones diferenciales y variable compleja", considerando los siguientes parámetros:

- Evaluación de Evidencias:

    - Revisión de todas las evidencias relacionadas a las actividades de concreción a partir de lo propuesto en la guía y otras que hubiesen sido sugeridas por el docente tutor, con respaldos, como ser: Videos, fotografías, apuntes, cartas de solicitud, etc.
    - Planes de Desarrollo Curricular.
    - Guía de Estudio referido a problemas y ejercicios resueltos conforme a las tareas asignadas en los temas de la Unidad de Formación.

- Evaluación de la socialización de la concreción:

    - Justificación del cómo y a partir de qué se haría la inclusión y articulación de temas abordados en sesiones presenciales con la Malla Curricular, el Plan de sarrollo curricular y el Proyecto Socioproductivo de la Unidad Educativa; en vista de que, "Ecuaciones diferenciales y variable compleja" no figuran en Plan y Programa de Estudios del nivel de Educación Secundaria Comunitaria Productivo.
    - Construcción, selección y el uso adecuado de materiales en el desarrollo de contenidos, según los planes de desarrollo curricular.
    - Productos tangibles e intangibles, que se originaron como resultados de las diversas actividades de concreción.
    - Uso de la lengua originaria durante las concreciones en Aula y comunidad, que evidencien los PDCs.

- Evaluación Objetiva:

    La o el tutor administrará una evaluación individual oral o escrita (dependiendo el número de participantes), con el fin de verificar la apropiación teórico/práctico de los contenidos de la Unidad de Formación.

Bibliografía

- Alvarado, P. (2008). Señales y Sistemas, Fundamentos Matemáticos. Cartago - Costa Rica: Centro de Desarrollo de Material Bibliográfico (CDMB).
- Braun, M. (1990) Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones. México: Iberoamérica, S.A. de C.V.
- Churchill, R. & Brown, J. (1992). Variable compleja y aplicaciones, Quinta Edición. Madrid - España: McGraw-Hill, S. A.
- Derrick, W. (1987). Variable compleja con aplicaciones. México: Iberoamérica, S.A. de C.V.
- Espinosa, E. (2012). Ecuaciones diferenciales. México: Red Tercer Milenio S.C.
- Gracia, I. & Román, N. (2008). Ecuaciones diferenciales. Barcelona: Departamento de Matemática Aplicada IV.
- Marín, J. (2014). Teorías de funciones de variable compleja. La Habana, Cuba: Universitaria.
- Molero, M., Salvador, A., Menarquez. T. & Garmendia, L. (2007). Funciones complejas. En Análisis matemático para ingeniería. Pearson Educación, S.A.
- Molero, M., Salvador, A., Menarquez. T. & Garmendia, L. (2007). Los números complejos. En Análisis matemático para ingeniería. (pp. 17-55). Pearson Educación, S.A.
- Duarte, (s. f.) Números complejos. (03 de agosto de 2016). http://rpduarte.fisica.uson.mx/archivos/curso3/01-Met-MatFisI.pdf
- Spiegel, M. (1983) Ecuaciones Diferenciales Aplicadas Tercera Edición. México: Hispanoamericana, S.A.
- Tejero, Á. & Ruiz, P. (2002). Ecuaciones diferenciales ordinarias.
- Olivares, M. (2002). Matemáticas III - Ecuaciones Diferenciales.
- Escobar, J. (s. f.) Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones en Maple
- Sánchez de los Reyes, V. Elementos de Ecuaciones Diferenciales Ordinaria.
- González, A. (2003). Variable Compleja.
- Ivorra, C. Funciones de variable compleja con aplicaciones a la teoría de número.

ESPECIALIDAD: MATEMÁTICA
UNIDAD DE FORMACIÓN: ECUACIONES DIFERENCIALES Y VARIABLE COMPLEJA

Temas	Utilidad para la o el maestro	Aplicabilidad en la vida	Contenidos	Bibliografía de profundización
Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden, Ordinarias Simples y de Orden Superior	Las maestras y los maestros del área de matemática, para desarrollar las ecuaciones diferenciales se basan sobre los conocimientos matemáticos previamente desarrollados desde el segundo año de Educación Secundaria. Si bien los contenidos del tema no se desarrollan en secundaria, esto se hace en las ESFM en 5to. año de formación inicial en la especialidad de matemática.	Es posible que el estudiante del nivel secundario o el bachiller no perciban la verdadera utilidad de las ecuaciones diferenciales en la vida cotidiana. No obstante, las ecuaciones diferenciales aparecen en el estudio de numerosos fenómenos físicos y químicos: desintegración radiactiva, crecimiento de poblaciones, reacciones químicas, problemas gravitatorios, etc.	• Soluciones de ecuaciones Espinosa, E. (2012). ***Ecuaciones diferenciales.*** México: Red Tercer Milenio S.C. (Pág. 16 - 18) OBLIGATORIA. • Ecuaciones diferenciales de separación de variables Braun, M. (1990) ***Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones.*** México: Iberoamérica, S.A. de C.V. (Pág. 19 a 25). OBLIGATORIA Video: ***Taller de ecuaciones diferenciales ordinarias***, (06:15 - 09:35 min.) https://www.youtube.com/watch?v=dq7_lfp4I54 • Ecuaciones diferenciales de homogéneas Tejero, Á. & Ruiz, P. (2002). ***Ecuaciones diferenciales ordinarias*** (Pág. 30 - 33) OBLIGATORIA Video: ***"Edo homogénea 1 y 2"*** (34 minutos • Ecuaciones diferenciales hechas exactas por un factor integrante apropiado Tejero, Á. & Ruiz, P. (2002). ***Ecuaciones diferenciales ordinarias*** (Pág. 19 - 21) OBLIGATORIA • Ecuación diferencial de primer orden lineal Braun, M. (1990) ***Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones.*** México: Iberoamérica, S.A. de C.V. (Pág. 2 a 10). OBLIGATORIA	Tejero, Á. & Ruiz, P. (2002). ***Ecuaciones diferenciales ordinarias***. Olivares, M. (2002). ***Matemáticas III - Ecuaciones Diferenciales.*** Spiegel, M. (1983) ***Ecuaciones Diferenciales aplicadas.*** Tercera Edición. México: Hispanoamericana, S.A. Espinosa, E. (2012). ***Ecuaciones diferenciales.*** México: Red Tercer Milenio S.C.

Ecuaciones Diferenciales Lineales y de Orden N	Propiamente no como ecuaciones diferenciales de orden N, no se desarrollan en 6to. año de Educación Secundaria Productiva, pero se desarrolla la derivada y la razón de cambio en la cotidianidad en las ESFM en 5to. año de formación inicial en la especialidad de matemática	Las ecuaciones diferenciales de orden N juegan un rol primordial en muchas disciplinas áreas (como geometría, mecánica y astronomía), son recursos de la física, la ingeniería, la economía, la meteorología y en aplicaciones como las de modelado en ciencias, obras arquitectónicas sometidas a fuerzas exteriores, vibraciones mecánicas, problemas de aeronáutica, etc.	• Ecuación diferencial lineal general de orden n Gracia, I. & Román, N. (2008). ***Ecuaciones diferenciales. Barcelona***: Departamento de Matemática Aplicada IV. (Pág. 19 a 27). OBLIGATORIA. • Existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones lineales Braun, M. (1990) ***Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones.*** México: Iberoamérica, S.A. de C.V. (Pág. 67 a 78). OBLIGATORIA • Ecuaciones lineales con coeficientes constantes Escobar, J. ***Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones en Maple.*** (Pág. 101 a 106). OBLIGATORIA • Ecuaciones lineales con coeficientes variables. Spiegel, M. (1983) ***Ecuaciones Diferenciales aplicadas.*** Tercera Edición. México: Hispanoamericana, S.A. (Pág. 215 a 218). OBLIGATORIA • Aplicaciones Escobar, J. ***Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones en Maple*** (Pág. 141 a 154). OBLIGATORIA Video: ***Cable de un puente colgante*** (00:01 - 13:32 min.) https://www.youtube.com/watch?v=qfxeradNhUs	Spiegel, M. (1983) ***Ecuaciones Diferenciales aplicadas.*** Tercera Edición. México: Hispanoamericana, S.A. Sánchez de los Reyes, V. ***Elementos de Ecuaciones Diferenciales Ordinaria***

Números Complejos	El desarrollo de Números complejos se basa sobre los temas desarrollados en 4to. año de Educación Secundaria Comunitaria Productiva como ser: - Funciones cuadráticas y ecuaciones cuadráticas. - Los números complejos. - Funciones exponencial y logarítmica. En las ESFM se desarrolla en 5to. año de formación inicial en la especialidad de matemática.	Los números complejos son la herramienta de trabajo del álgebra, así como de ramas de las matemáticas puras y aplicadas como variable compleja y ecuaciones diferenciales. Además los números complejos se utilizan en muchos campos de la física, concretamente en la mecánica cuántica y en ingeniería, especialmente en la electrónica y las telecomunicaciones, para representar las ondas electromagnéticas y la corriente eléctrica.	• Propiedades algebraicas Molero, M., Salvador, A., Menarquez. T. & Garmendia, L. (2007). ***Los números complejos. En Análisis matemático para ingeniería***. Pearson Educación, S.A. (Pág. 21 - 24). OBLIGATORIA • Interpretación geométrica Churchill, R. & Brown, J. (1992). ***Variable compleja y aplicaciones*** (Pág. 7 - 10). OBLIGATORIA Video: ***Los números complejos y su importancia*** (00:01 - 25:42 min.) https://www.youtube.com/watch?v=zmB-0v41LYNM • Forma standar, forma polar, forma exponencial y raíces Churchill, R. & Brown, J. (1992). ***Variable compleja y aplicaciones.*** Quinta Edición. Madrid - España: McGraw-Hill, S. A. (Pág. 14 - 23) OBLIGATORIA • Regiones en el plano complejo Duarte, (s. f.) ***Números complejos.*** (03 de agosto de 2016). http://rpduarte.fisica.uson.mx/archivos/curso3/01-MetMatFisI.pdf (Pág. 15 - 18) OBLIGATORIA • Funciones trascendentes básicas Molero, M., Salvador, A., Menarquez. T. & Garmendia, L. (2007). ***Los números complejos. En Análisis matemático para ingeniería.*** Pearson Educación, S.A. Cap. 2 (Pág. 61 - 64). OBLIGATORIA	Churchill, R. & Brown, J. (1992). ***Variable compleja y aplicaciones.*** Quinta Edición. Madrid - España: McGraw-Hill, S. A. Marín, J. (2014). ***Teorías de funciones de variable compleja.*** La Habana, Cuba: Universitaria. González, A. (2003). ***Variable Compleja.***
Integración Compleja	La maestra o el maestro de matemática desarrollan en 4to. año de Educación Secundaria Comunitaria Productiva: - La Integral y su aplicación en la tecnología. - Derivadas e Integrales. Propiamente integración compleja en el 6to. año, y en las ESFM se desarrolla en 5to. año de formación inicial en la especialidad de matemática	En la Ingeniería civil se utilizan las integrales para calcular estructuras y áreas. En la Ingeniería electrónica para calcularlos tiempos de carga y descarga de corriente. En la Ecología y Medio Ambiente se emplea para el conteo de organismos y cálculo de crecimiento exponencial de bacterias y especies.	• Integración de línea en el plano complejo Derrick, W. (1987). ***Variable compleja con aplicaciones.*** México: Iberoamérica, S.A. de C.V. (Pág. 61 - 69) OBLIGATORIA • Integración de contorno y teorema de Green Alvarado, P. (2008). ***Señales y Sistemas. Fundamentos Matemáticos.*** (Pág. 72 a 76) OBLIGATORIA • La fórmula integral de Cauchy y su extensión González, A. (2003). ***Variable Compleja*** (Pág. 27 - 30) OBLIGATORIA • El teorema de residuos y aplicaciones Marín, J. (2014). ***Teorías de funciones de variable compleja.*** La Habana, Cuba: Universitaria. (Pág. 187 - 211) OBLIGATORIA	Derrick, W. (1987). ***Variable compleja con aplicaciones.*** México: Iberoamérica, S.A. de C.V. Alvarado, P. (2008). ***Señales y Sistemas. Fundamentos Matemáticos*** Cartago - Costa Rica: Centro de Desarrollo de Material Bibliográfico (CDMB). Ivorra, C. ***Funciones de variable compleja con aplicaciones a la teoría de números.***

MINISTERIO DE
educación
ESTADO PLURINACIONAL DE BOLIVIA

Revolución Educativa
con Revolución Docente
para Vivir Bien