

**NA**  
Nivelación  
Académica



Guía de Estudio

# Cálculo en $R^n$ , Relación Armónica y Equilibrada con la Producción

Matemática



© De la presente edición

**Colección:**

GUÍAS DE ESTUDIO - NIVELACIÓN ACADÉMICA

**DOCUMENTO:**

Unidad de Formación

Cálculo en  $R_n$ , Relación Armónica y Equilibrada con la Producción

Documento de Trabajo

**Coordinación:**

Dirección General de Formación de Maestros

Nivelación Académica

**Como citar este documento:**

Ministerio de Educación (2016). Guía de Estudio: Unidad de Formación

“Cálculo en  $R_n$ , Relación Armónica y Equilibrada con la Producción”, Equipo Nivelación Académica, La Paz Bolivia.

**LA VENTA DE ESTE DOCUMENTO ESTÁ PROHIBIDA**

Denuncie al vendedor a la Dirección General de Formación de Maestros, Telf. 2912840 - 2912841

**NA**



# **Cálculo en $R_n$ , Relación Armónica y Equilibrada con la Producción**

**Matemática**





Puntaje

### Datos del participante

**Nombres y Apellidos:** .....

**Cédula de identidad:** .....

**Teléfono/Celular:** .....

**Correo electrónico:** .....

**UE/CEA/CEE:** .....

.....

**ESFM:** .....

**Centro Tutorial:** .....



# Índice

Presentación .....	7
Estrategia formativa .....	8
Objetivo Holístico de la Unidad de Formación .....	10
Orientaciones para la Sesión Presencial .....	11
Materiales Educativos .....	12
Partiendo desde nuestra Experiencia y el Contacto con la Realidad.....	13
<b>Tema 1: Vectores en <math>\mathbb{R}^3</math></b> .....	15
Profundización a partir del diálogo con los autores y el apoyo bibliográfico .....	16
1. Vectores y escalares .....	16
2. Álgebra vectorial: operaciones con vectores y módulo de un vector .....	17
3. Módulo de un vector.....	18
4. Proyección ortogonal .....	18
5. Producto escalar.....	19
6. Producto Vectorial.....	20
7. Producto mixto o producto escalar triples .....	20
8. Aplicaciones .....	21
<b>Tema 2: Geometría Analítica del Espacio</b> .....	22
Profundización a partir del diálogo con los autores y el apoyo bibliográfico.....	23
1. Espacio Euclidiano Tridimensional.....	23
2. La recta .....	24
3. Distancia de un punto a una recta.....	24
4. Distancia entre dos rectas .....	25
5. El plano y ecuaciones del plano.....	25
6. Distancia de un punto a un plano.....	26
7. Superficies cuádricas, cuadráticas y esféricas.....	26
8. Coordenadas curvilíneas .....	27

<b>Tema 3: Cálculo Diferencial en <math>\mathbb{R}^n</math></b> .....	28
Profundización a partir del diálogo con los autores y el apoyo bibliográfico.....	29
1. Funciones con varias variables .....	29
2. Límites .....	30
3. Regla de derivación .....	30
4. Derivadas parciales de orden superior .....	31
5. Diferenciales .....	32
6. Regla de la cadena.....	32
7. Derivación implícita.....	32
8. Jacobianos .....	33
9. Funciones homogéneas teorema de Euler .....	34
10. Teorema de valor medio y de Taylor .....	34
11. Interpretación geométrica de las derivadas parciales.....	35
12. Aplicaciones de derivadas parciales.....	35
<b>Tema 4: Integrales Múltiples</b> .....	37
Profundización a partir del diálogo con los autores y el apoyo bibliográfico.....	38
1. Integrales dobles .....	38
2. Integrales dobles sobre regiones generales .....	39
3. Cambio de orden de integración .....	39
4. Cambio de variable en la integración doble .....	40
5. Integración doble en coordenadas polares .....	40
6. Cálculo de áreas de figuras planas.....	41
7. Cálculo de volúmenes.....	41
8. Cálculo de áreas de superficies .....	42
9. Integral triple .....	43
10. Integral triple en coordenada cilíndricas.....	44
11. Integral triple en coordenadas esféricas .....	44
12. Volumen con integral triple .....	45
13. Cambio de variable en la integral triple .....	45
Orientaciones para la Sesión de Concreción .....	47
Orientaciones para la Sesión de Socialización .....	54
Bibliografía .....	55
Anexo	

# Presentación

El proceso de Nivelación Académica constituye una opción formativa dirigida a maestras y maestros sin pertinencia académica y segmentos de docentes que no han podido concluir distintos procesos formativos en el marco del PROFOCOM-SEP. EL mismo ha sido diseñado desde una visión integral como respuesta a la complejidad y las necesidades de la transformación del Sistema Educativo Plurinacional.

Esta opción formativa desarrollada bajo la estructura de las Escuelas Superiores de Formación de Maestras/os autorizados, constituye una de las realizaciones concretas de las políticas de formación docente, articuladas a la implementación y concreción del Modelo Educativo Sociocomunitario Productivo (MESCP), para incidir en la calidad de los procesos y resultados educativos en el marco de la Revolución Educativa con 'Revolución Docente' en el horizonte de la Agenda Patriótica 2025.

En tal sentido, el proceso de Nivelación Académica contempla el desarrollo de Unidades de Formación especializadas, de acuerdo a la Malla Curricular concordante con las necesidades formativas de los diferentes segmentos de participantes que orientan la apropiación de los contenidos, enriquecen la práctica educativa y coadyuvan al mejoramiento del desempeño docente en la UE/CEA/CEE.

Para apoyar este proceso se ha previsto el trabajo a partir de Guías de Estudio, Dossier Digital y otros recursos, los cuales son materiales de referencia básica para el desarrollo de las Unidades de Formación.

Las Guías de Estudio comprenden las orientaciones necesarias para las sesiones presenciales, de concreción y de socialización. En función a estas orientaciones, cada tutora o tutor debe enriquecer, regionalizar y contextualizar los contenidos y las actividades propuestas de acuerdo a su experiencia y a las necesidades específicas de las y los participantes.

Por todo lo señalado se espera que este material sea de apoyo efectivo para un adecuado proceso formativo, tomando en cuenta los diferentes contextos de trabajo y los lineamientos de la transformación educativa en el Estado Plurinacional de Bolivia.

Roberto Iván Aguilar Gómez  
**MINISTRO DE EDUCACIÓN**

# Estrategia formativa

El proceso formativo del Programa de Nivelación Académica se desarrolla a través de la modalidad semipresencial según calendario establecido para cada región o contexto, sin interrupción de las labores educativas en las UE/CEA/CEEs.

Este proceso formativo, toma en cuenta la formación, práctica educativa y expectativas de las y los participantes del programa, es decir, maestras y maestros del Sistema Educativo Plurinacional que no concluyeron diversos procesos formativos en el marco del PROFOCOM-SEP y PPMI.

Las Unidades de Formación se desarrollarán a partir de sesiones presenciales en periodos intensivos de descanso pedagógico, actividades de concreción que la y el participante deberá trabajar en su práctica educativa y sesiones presenciales de evaluación en horarios alternos durante el descanso pedagógico. La carga horaria por Unidad de Formación comprende:

SESIONES PRESENCIALES	CONCRECIÓN EDUCATIVA	SESIÓN PRESENCIAL DE EVALUACIÓN	
24 Hrs.	50 Hrs.	6 Hrs.	80 Hrs. X UF

## FORMACIÓN EN LA PRÁCTICA

Estos tres momentos consisten en:

**1er. MOMENTO (SESIONES PRESENCIALES).** Parte de la experiencia cotidiana de las y los participantes, desde un proceso de reflexión de su práctica educativa.

A partir del proceso de reflexión de la práctica de la y el participante, la tutora o el tutor promueve el dialogo con otros autores/teorías. Desde este dialogo de la y el participante retroalimenta sus conocimientos, reflexiona y realiza un análisis comparativo para generar nuevos conocimientos desde su realidad.

**2do. MOMENTO (CONCRECIÓN EDUCATIVA).** Durante el periodo de concreción de la y el participante deberá poner en práctica con sus estudiantes o en su comunidad educativa lo trabajado (contenidos) durante las Sesiones Presenciales. Asimismo, en este periodo de la y el participante deberá desarrollar procesos de autoformación a partir de las orientaciones de la tutora o el tutor, de la Guía de Estudio y del Dossier Digital de la Unidad de Formación.

**3er. MOMENTO (SESIÓN PRESENCIAL DE EVALUACIÓN).** Se trabaja a partir de la socialización de la experiencia vivida de la y el participante (con documentación de respaldo); desde esta presentación de la tutora o el tutor deberá enriquecer y complementar los vacíos y posteriormente evaluar de forma integral la Unidad de Formación.



# Objetivo Holístico de la Unidad de Formación

Una vez concluida la sesión presencial (24 horas académicas), el participante deberá construir el objetivo holístico de la presente unidad de formación, tomando en cuenta las cuatro dimensiones.

# Orientaciones para la Sesión Presencial



La Guía de Estudio de la Unidad de Formación “Cálculo en  $R_n$ , Relación Armónica y Equilibrada con la Producción”, por ser de carácter formativo y evaluable, las/los participantes trabajarán en la diversidad de actividades teóricas/prácticas programadas para el desarrollo de las diferentes temáticas. Al inicio encontrará actividades tituladas “Partiendo de nuestra realidad”, cuyo objetivo es que exteriorice sus saberes y conocimientos, a partir de su experiencia y realidad socio-educativa en relación a esta Unidad de Formación.

Durante el proceso de desarrollo de la presente guía deben remitirse constantemente, desde el principio hasta el final, al material bibliográfico (dossier) que se les ha proporcionado, puesto que nos ayudará a tener una visión más amplia y clara de lo que se trabajará en esta Unidad de Formación. Para las sesiones presenciales debe tomarse en cuenta dos aspectos:

**La organización del Aula:** para comenzar el desarrollo del proceso formativo es fundamental considerar la organización del ambiente, de manera que sea un espacio propicio y adecuado para el avance de las actividades planteadas. Tomando en cuenta el tipo de actividad o actividades que se realizarán durante la sesión.

**Las actividades formativas, considerando la profundización a partir del diálogo con los autores y el apoyo bibliográfico:** Las actividades correspondientes a la Unidad de Formación “Cálculo en  $R_n$ , Relación Armónica y Equilibrada con la Producción”, que a lo largo de los contenidos irán desarrollándose de acuerdo a las consignas en cada una de ellas, tienen relevancia a partir de las siguientes actividades:

- Aplicación de las experiencias propias, pedagógicas o en el contexto.
- Resolución y planteamiento de ejercicios y problemas.
- Descripción y construcción de gráficos tal vez con asistentes matemáticos como Derive, Geogebra, Cabri, etc.
- Comparación y análisis de resultados obtenidos durante el desarrollo.
- Elaboración de materiales educativos.

Debemos considerar que las lecturas de trabajo propuestas deben ser abordadas de manera crítica y problemática; no se trata de leer de manera pasiva, repetitiva o memorística; éstas deben apoyar en la profundización del debate y discusión en equipo.

# Materiales Educativos

Los materiales y recursos educativos, se convierten en una herramienta para lograr un aprendizaje significativo en las y los estudiantes, lo que implica darles a estos materiales un nuevo sentido o funcionalidad.

A continuación, mencionamos los diferentes materiales/recursos educativos que nos permitirá la producción de conocimientos significativos durante todo el proceso formativo.

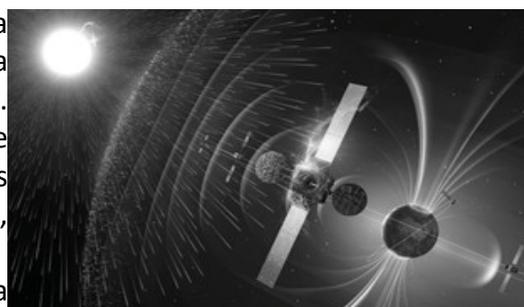
Descripción del Material/recurso educativo	Producción de conocimientos
Estuche Geométrico	Ayuda a trazar de manera correcta los gráficos, mejorando la precisión en el manejo de los instrumentos geométricos.
Calculadora científica	Mejora el manejo adecuado de la calculadora.
Instrumentos de medición	Comparación de magnitudes físicas mediante un proceso de medición. Como unidades de medida se utilizan objetos y sucesos previamente establecidos como estándares o patrones.
Materiales que existen en el contexto	Los materiales del contexto nos ayudaran a elaborar materiales educativos, de acuerdo a la unidad temática.
Materiales reciclables	Fortalece el cuidado a la madre tierra, incluyen todo el papel y cartón, el vidrio, metales, algunos plásticos, telas y textiles, maderas, componentes electrónicos y materiales de cada contexto.
Asistentes matemáticos	Geogebra, derive, cabrí
Videos	Facilita el descubrimiento de conocimientos y la asimilación de éstos.

## Partiendo desde nuestra Experiencia y el Contacto con la Realidad.



Partir del contacto directo con la realidad involucra generar procesos de producción de conocimiento a través de la investigación dentro de la propia realidad. Vivir el proceso de construcción del conocimiento de nuestra realidad, generando en las/los participantes las habilidades y capacidades creativas y productivas, al aprender las cosas, haciéndolas.

Veamos este ejemplo antes de tomar esta temática vectores en R3:



*“El mundo real es vectorial, y no podemos expresarlo sin recurrir a vectores que tiene los elementos de: origen (o punto de aplicación), sentido, magnitud (o módulo) y dirección. El ejemplo nos demostrará la necesidad de recurrir a vectores de dos o tres componentes, aunque este caso sólo es una aproximación de la realidad. Mi persona desea encontrarse con un docente que llegó de la ciudad de Sucre. Necesito saber dónde está, pero si solo sé que se encuentra a 20 Km., no podré encontrarla con esa única información. Si no que necesito saber dirección, y el sentido, es decir utilizo, un vector de dos dimensiones. En este caso he considerado que la Tierra es plana y sólo nos movemos por su superficie. Pero si al llegar exactamente al punto indicado, me encuentro al pie de un edificio con 10 plantas, aún me falta saber una tercera coordenada más, y eso me lleva a considerar un vector de tres dimensiones. Con el vector completo ya tengo ubicado a la persona indicada exactamente”.*

### Preguntas activadoras o problematizadoras

1.- ¿De qué manera los contenidos temáticos que vamos a desarrollar pueden aportar a la implementación del PSP en nuestra Unidad Educativa?

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

2.- ¿Qué experiencias prácticas se deberían implementar desde la Matemática y Física en su Unidad Educativa y/o comunidad para preservar la Madre Tierra? ¿Cómo resignificamos los saberes y conocimientos culturales relacionándolo con el mundo de la matemática en el contexto y la naturaleza?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3.- ¿Cómo desde el sentido del campo Ciencia Tecnología y Producción podemos responder a nuestra problemática identificada en el PSP?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

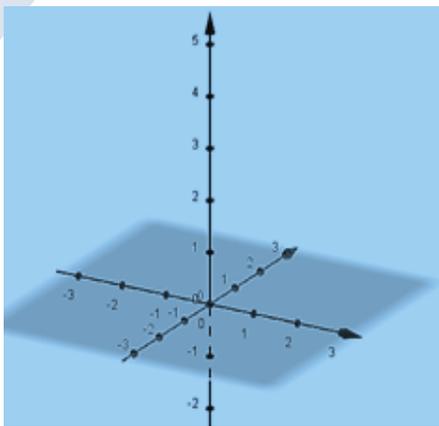
.....

.....



# Tema 1

## Vectores en $\mathbb{R}^3$ .



*“Para resolver un problema que haga referencia a un número o relaciones de cantidades solo hace falta traducir el lenguaje en el que está escrito, al lenguaje algebraico”*

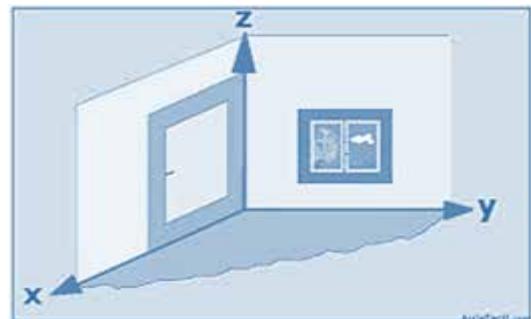
*Isaac Newton*

Un sistema de coordenadas tridimensional se construye trazando un eje Z, perpendicular en el origen de coordenadas a los ejes X e Y. Cada punto viene determinado por tres coordenadas  $P(x, y, z)$ . Los ejes de coordenadas determinan tres planos coordenados: XY, XZ e YZ.

Estos planos coordenados dividen al espacio en ocho regiones llamadas octantes, en el primer octante las tres coordenadas son positivas.

Ejemplo de nuestro contexto:

Observamos el siguiente gráfico y relacionamos, con las aulas de nuestra Unidad Educativa o simplemente con el dormitorio o sala de nuestro departamento donde vivimos.



Cuando hemos oído hablar de los juegos de la computadora, las nuevas películas animadas, etc. Todas estas cosas están hechas con gráficos vectoriales, no sólo en la animación ni en estos casos están presentes los vectores, sino también en el transporte aéreo, el desplazamiento de los barcos, entre otros.

De igual manera podemos citar algunas aplicaciones en nuestra vida real. Para levantar un objeto pesado y no lastimarnos la espalda, aprender a nadar, jugar billar, mejorar el rendimiento en cualquier deporte que practiquemos, usar cualquier tipo de herramienta de la manera adecuada, etc.

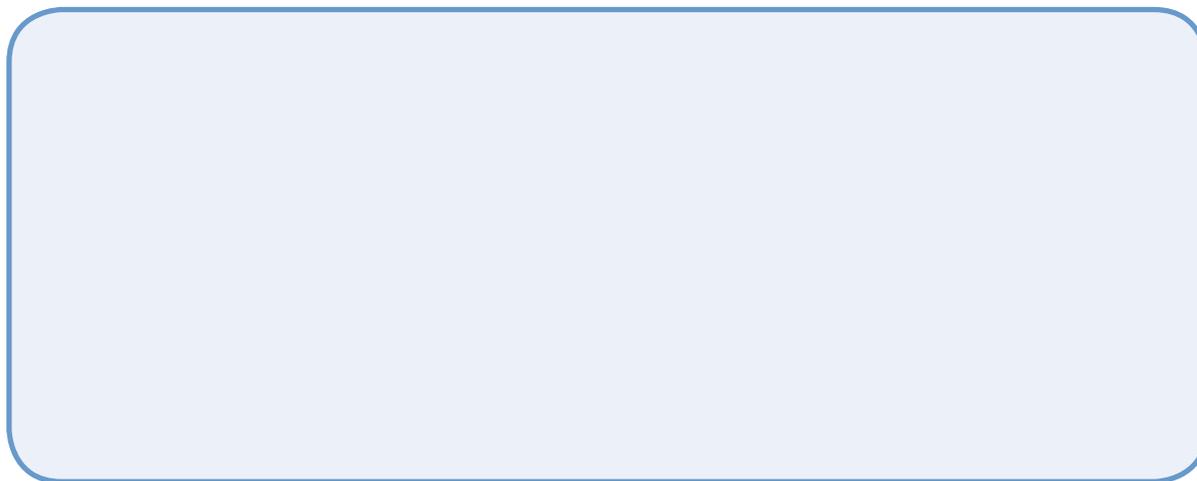
## Profundización a partir del diálogo con los autores y el apoyo bibliográfico

### 1. Vectores y escalares

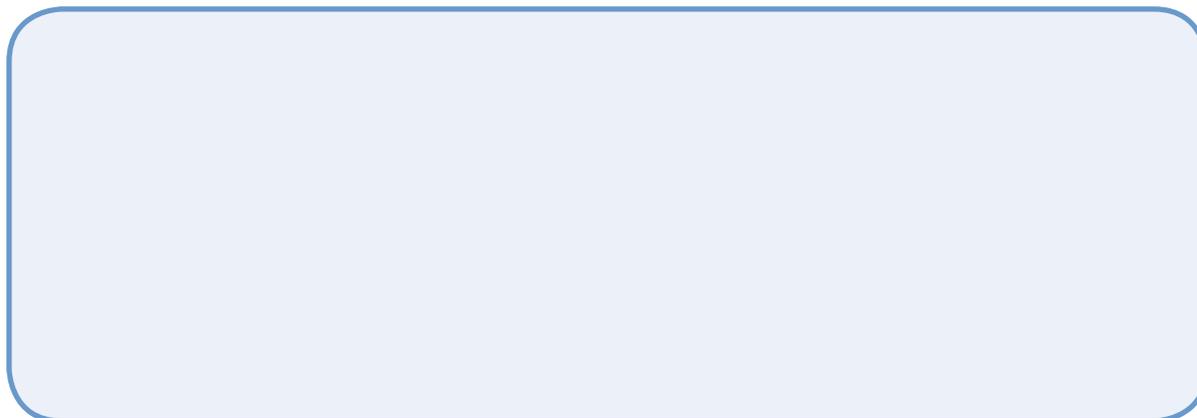
Recordemos que lo que son los vectores y los escalares:

Los vectores en su representación gráfica son segmentos orientados (es decir que tiene una dirección), los vectores aparte de tener dirección también tienen tamaño o longitud. Sin embargo el escalar es una magnitud física que se representa por un solo número (ejemplo: masa, longitud, distancia, etc.)

Ahora que ya hemos recordado las definiciones de vectores y escalares, analicemos ejemplos y definiciones sobre vectores y escalares en el plano del texto: (Mejía R., 2000) *“Cálculo II”* (Pág. 1 - 6) y observamos el Video: *“Gráfica de un vector en el espacio”* (00:01 – 06:54 min.). Represente gráficamente un vector y cite ejemplos de magnitudes escalares, compara la respuesta con sus compañeros.

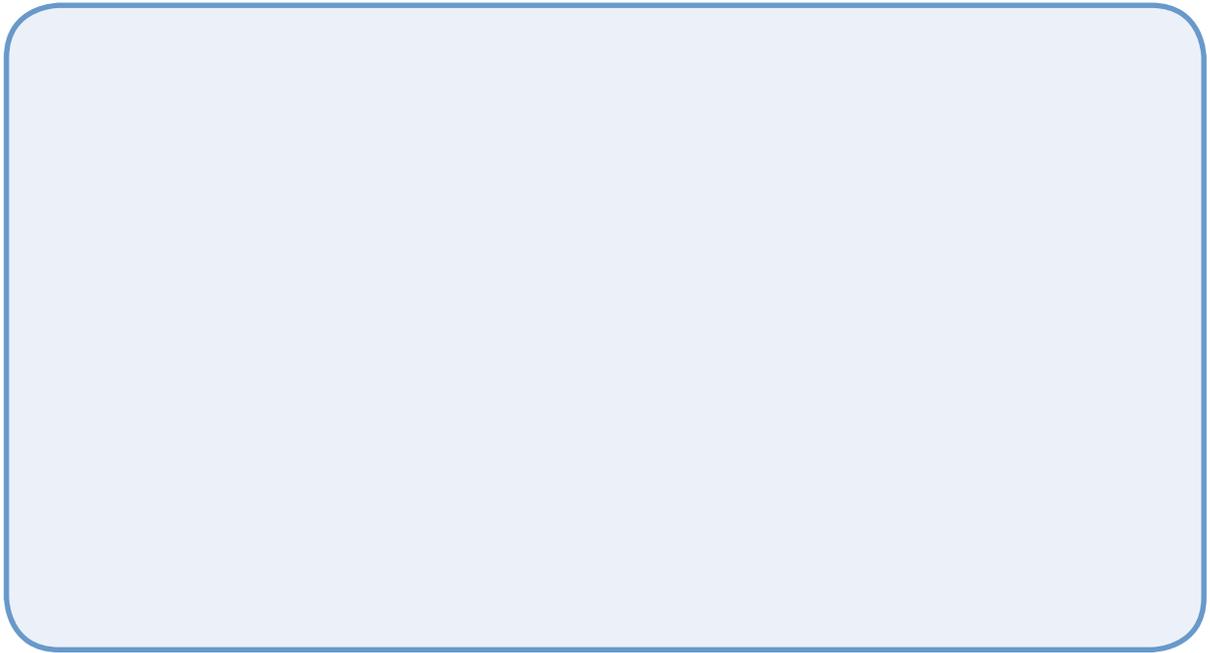


Aplicando lo anterior, en equipo resuelva los siguientes ejercicios propuestos y compara las respuestas con el texto (Mejía R., 2000) *“Cálculo II”* (Pág. 6 - 7). ¿Cómo podemos representar un vector en nuestro contexto?

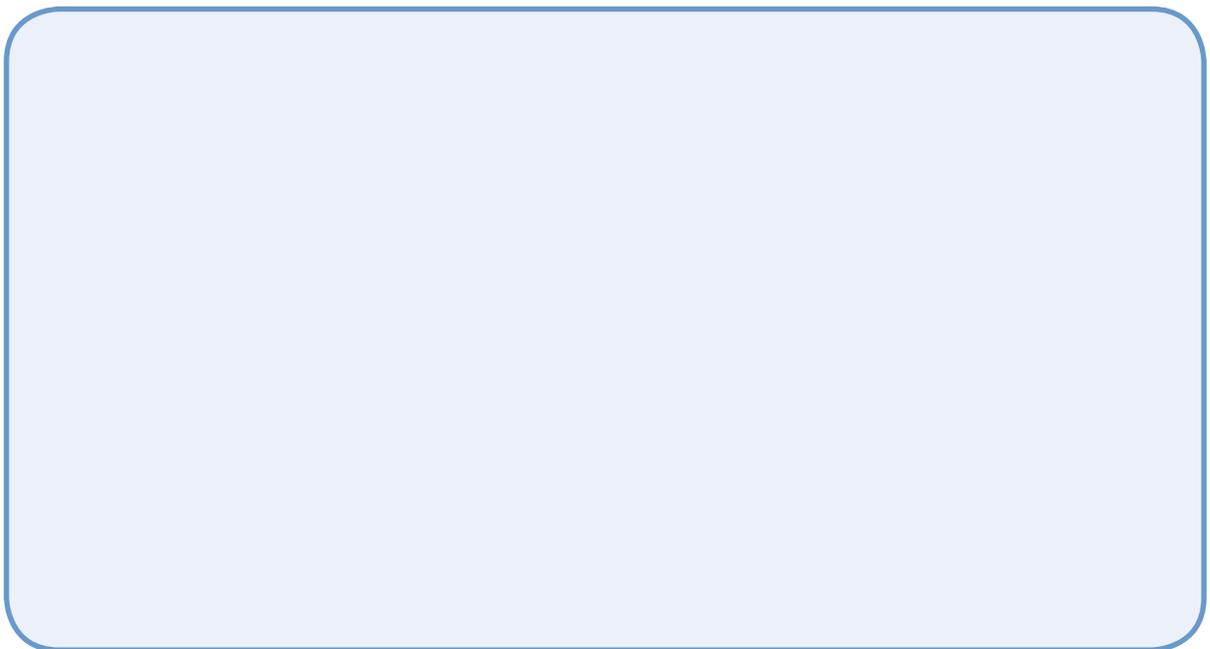


## 2. Álgebra vectorial: operaciones con vectores y módulo de un vector

De acuerdo a lo que indica y explica el libro (Espinoza E., 2008) "**Vectores y Matrices**" (Pág. 10 - 16) y el video: "**Vector en  $\mathbb{R}^3$  Álgebra educativa**" (00:01 – 09:12 min.), responde a las siguientes preguntas: ¿Cuáles son las propiedades fundamentales de adición de vectores y su representación gráfica? ¿Cómo interpretamos geoméricamente la igualdad de vectores? ¿Cómo relacionamos esta igualdad de vectores en nuestro contexto?



Haciendo uso de tu material geométrico, en el siguiente espacio interpreta geoméricamente la diferencia de vectores:



### 3. Módulo de un vector

Con ayuda del texto (Espinoza E., 2008) **“Vectores y Matrices”** (Pág. 17 - 23) y el video: **“Longitud o norma de vector”** (00:01 – 07:36 min.) demostrar en forma analítica y gráfica lo siguiente: Norma de un vector de dos componentes, tres componentes y finalmente para n componentes.

$$1.- \|A\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

$$2.- \|A\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

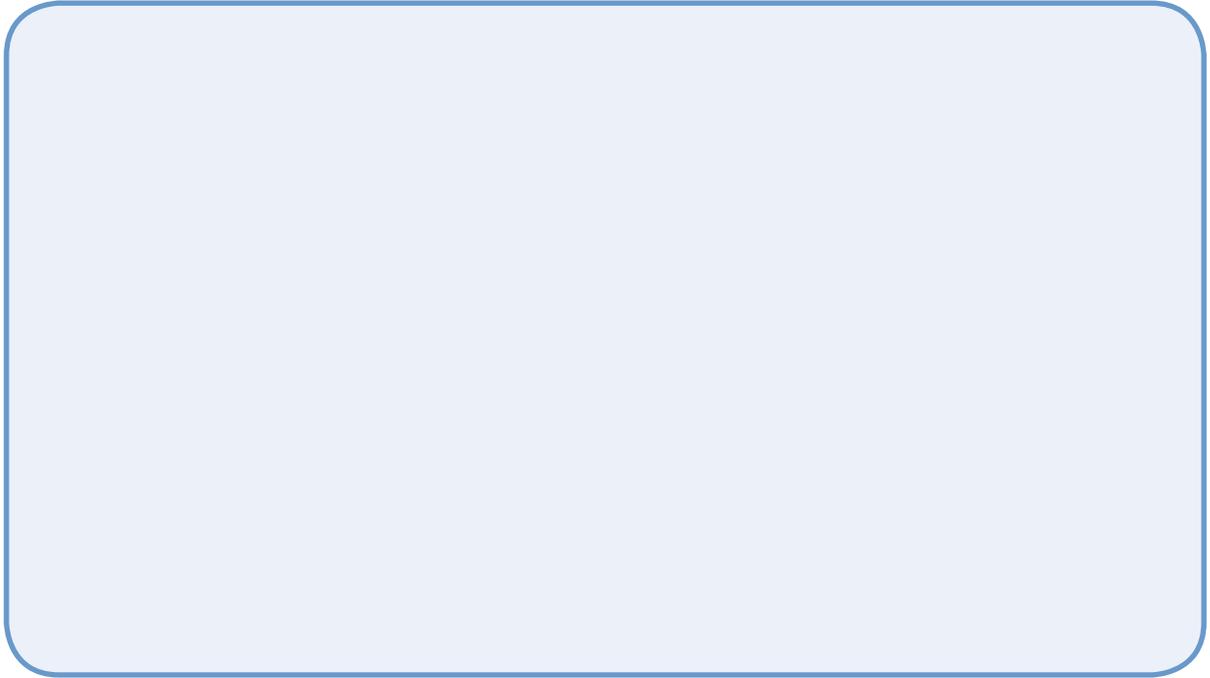
$$3.- \|A\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$$

Norma de un vector de dos componentes:	Gráfica:
Tres componentes	Gráfica:
“n” componentes:	Gráfica:

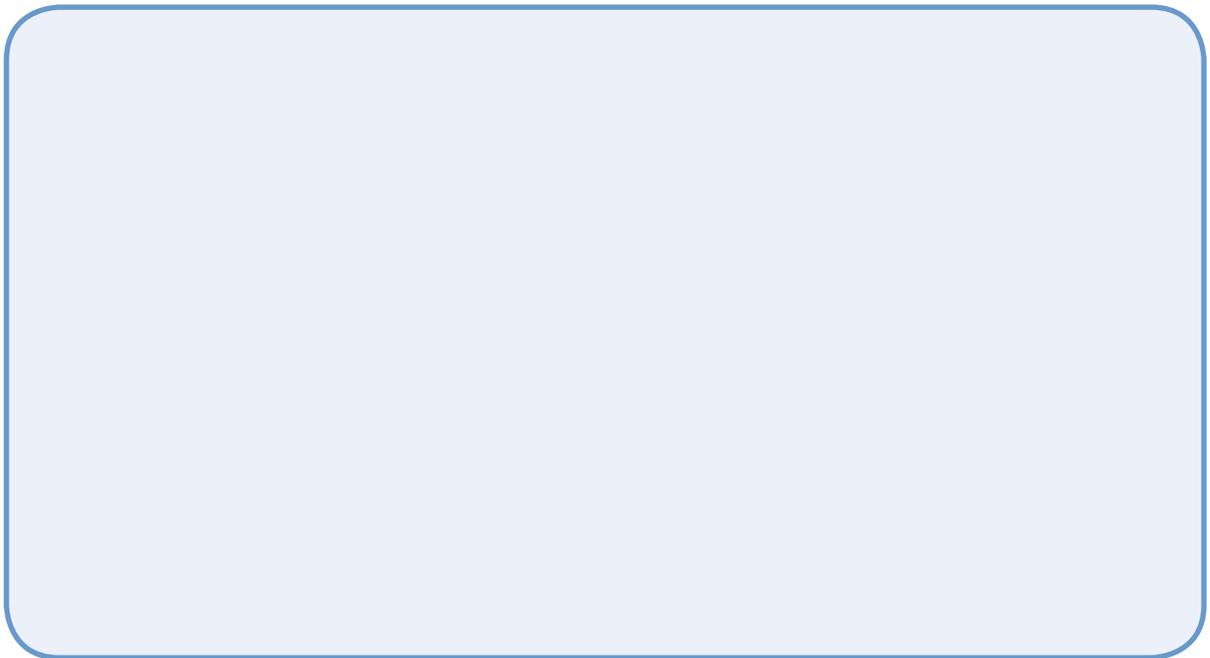
### 4. Proyección ortogonal

Recordamos lo desarrollado en la Unidad de Formación **“Álgebra Lineal, Diseño y Producción”** en relación a proyección ortogonal, complementamos nuestros conocimientos con lo que afirma el libro (Espinoza E. 2008) **“Vectores y Matrices”** (Pág. 31-35), y respondemos a: ¿Cómo interpretamos la proyección ortogonal y componente gráfico?



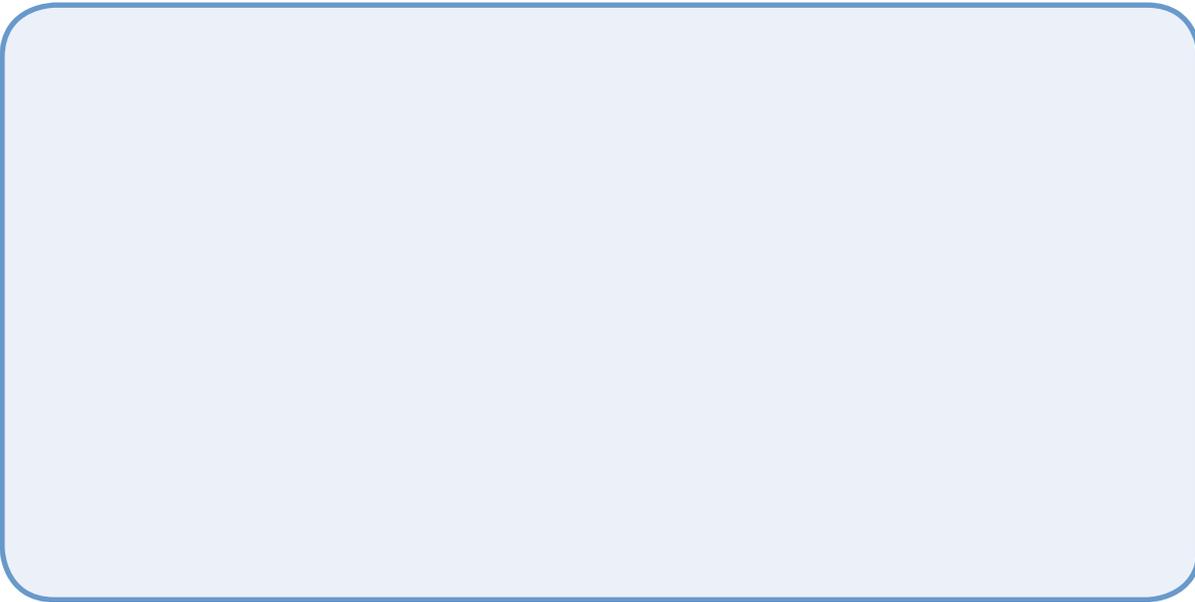


Aplicamos lo asimilado y demostramos el teorema “Ángulo entre dos vectores”, a partir de proyección ortogonal.



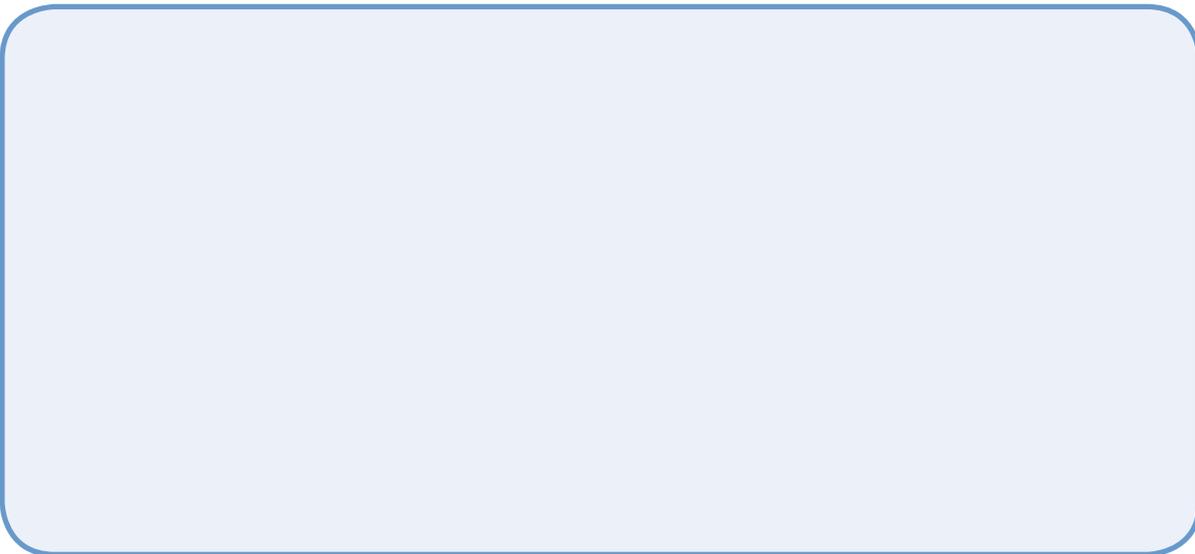
## 5. Producto escalar

¿Recuerdas que es el producto escalar? Tal vez si o tal vez no, para refrescar la memoria, analizamos e interpretamos los ejemplos resueltos del texto (Mejía R., 2000) “*Cálculo II*” (Pág. 31 - 35), anotamos una conceptualización de “producto escalar” y explicamos los ejemplos.



## 6. Producto Vectorial

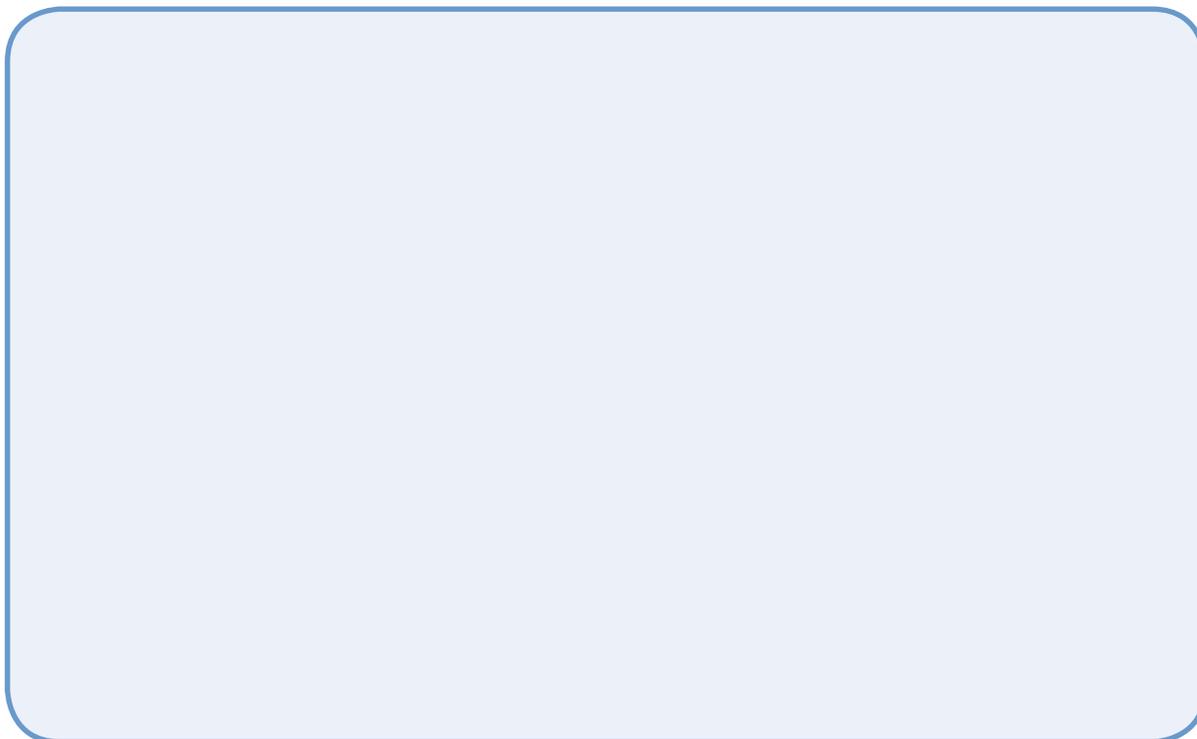
Haciendo un uso correcto del material geométrico, definimos y graficamos en el espacio tridimensional el producto vectorial con apoyo del texto (Espinoza E., 2008) *“Vectores y Matrices”* (Pág. 43 - 48), en el texto se podremos ver algunas graficas del producto vectorial. En este sentido, respondemos a la siguiente pregunta: ¿Cómo relacionamos la gráfica del producto vectorial con el contexto de la Unidad Educativa – Sistema de coordenadas cartesianas en el espacio?



## 7. Producto mixto o producto escalar triples

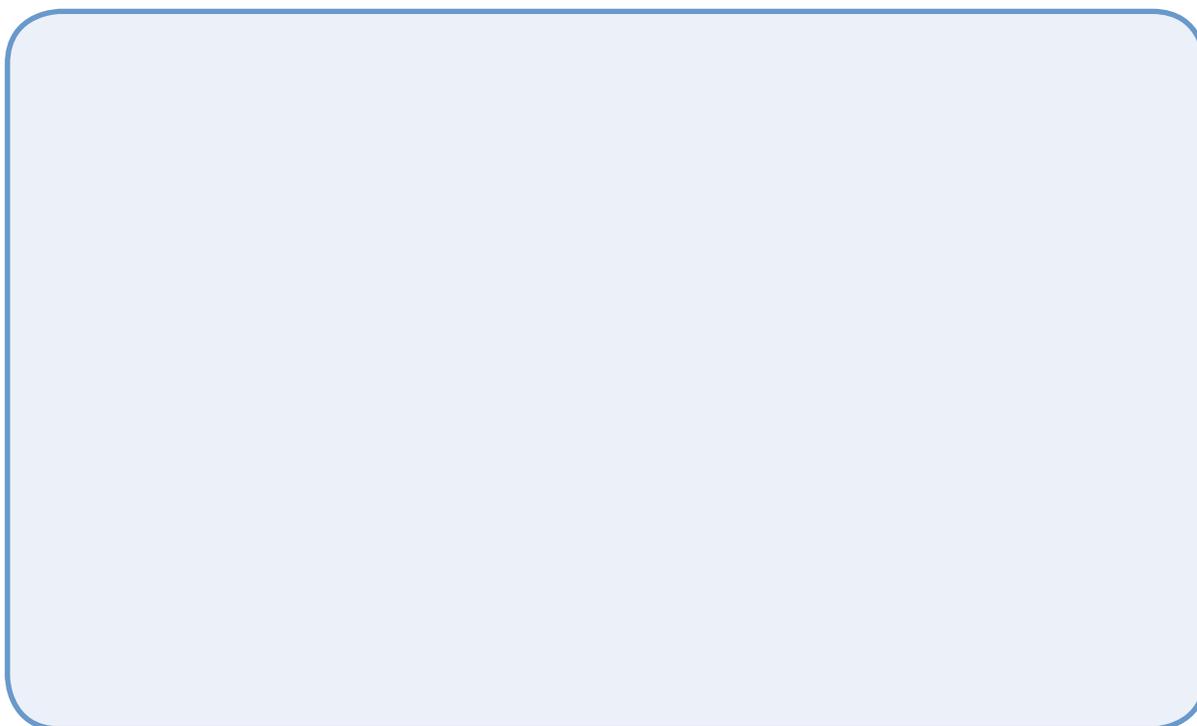
Según el texto (Espinoza E., 2008) *“Vectores y Matrices”* (Pág. 50 - 55). Interpretamos y construimos ejemplos de nuestro contexto. ¿Cómo encontrar el volumen de un paralelepípedo?





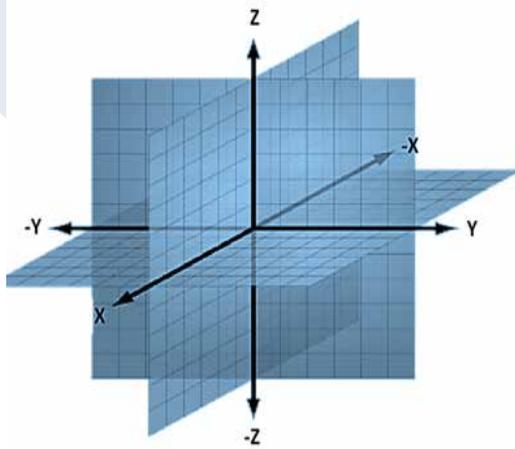
## 8. Aplicaciones

Ponemos a prueba nuestros conocimientos haciendo algunas aplicaciones al resolvemos de forma analítica y gráfica, algunos ejercicios propuestos en el texto (Espinoza E., 2008) "**Vectores y Matrices**" (Pág. 55 en adelante). Compara el resultado con los compañeros de tu equipo.



## Tema 2

# Geometría Analítica del Espacio



*“Estoy absolutamente convencido que ninguna riqueza del mundo puede ayudar a que progrese la humanidad. El mundo necesita paz permanente y buena voluntad perdurable.”*

*Albert Einstein*

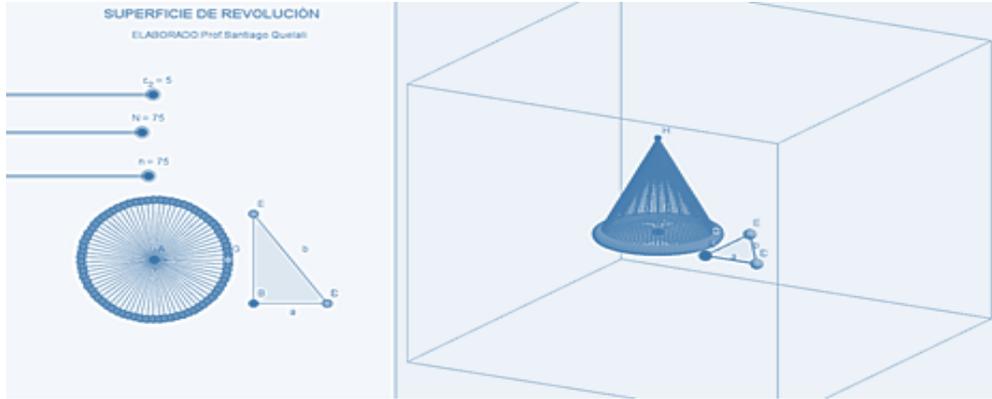
El estudio de la geometría analítica del espacio, es el estudio de la geometría existente en el espacio formado por un sistema de coordenadas. Los problemas básicos de la geometría analítica son:

- Dada una ecuación matemática, hallar su lugar geométrico.
- Dado un lugar geométrico, hallar la ecuación matemática.

Recordemos que el sistema de coordenadas en el espacio está formado por tres planos perpendiculares mutuamente llamados planos coordenados, el punto donde se cortan los planos coordenados o el puntos “0” se llama origen, las rectas de intersección de los planos coordenados se llaman ejes y se nombran como se muestra en la figura: Eje X, Eje Y y Eje Z, según la regla de la mano derecha. El sentido de cada eje se indica por una flecha. Los tres planos coordenados dividen el espacio en ocho regiones llamados octantes. El octante formado por las partes positivas de los ejes coordenados se llama primer octante.

La geometría analítica del espacio tiene mucha utilidad, porque se ocupa de las propiedades y medidas de figuras geométricas en el espacio tridimensional. Entre estas figuras, también llamados sólido se encuentra el cono, el cubo, el cilindro, la pirámide, la esfera y el prisma. La geometría del espacio amplía y refuerza las proposiciones de la geometría plana, y es la base fundamental de la trigonometría esférica, la geometría analítica del espacio, la geometría descriptiva y otras ramas de las matemáticas. Se usa ampliamente en matemáticas, en ingeniería y en ciencias naturales.

Observemos los siguientes gráficos elaborados con el asistente matemático GEOGEBRA, estos gráficos se encuentran en el espacio.



## Profundización a partir del diálogo con los autores y el apoyo bibliográfico

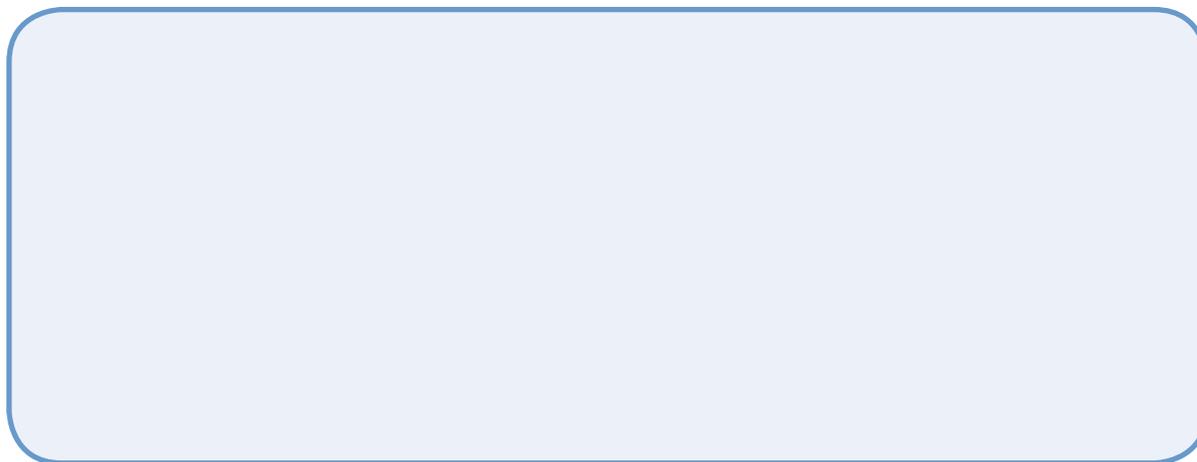
### 1. Espacio Euclidiano Tridimensional

De acuerdo a las imágenes presentadas al inicio del tema, conceptualiza el Espacio Euclidiano.

Ahora observa el Video: “Espacio Tridimensional 1” (00:01 – 03:01 min.) y a partir de la imágenes y definiciones que presenta, construye los octantes gráficamente, señalando los planos XY, YZ y XZ.

## 2. La recta

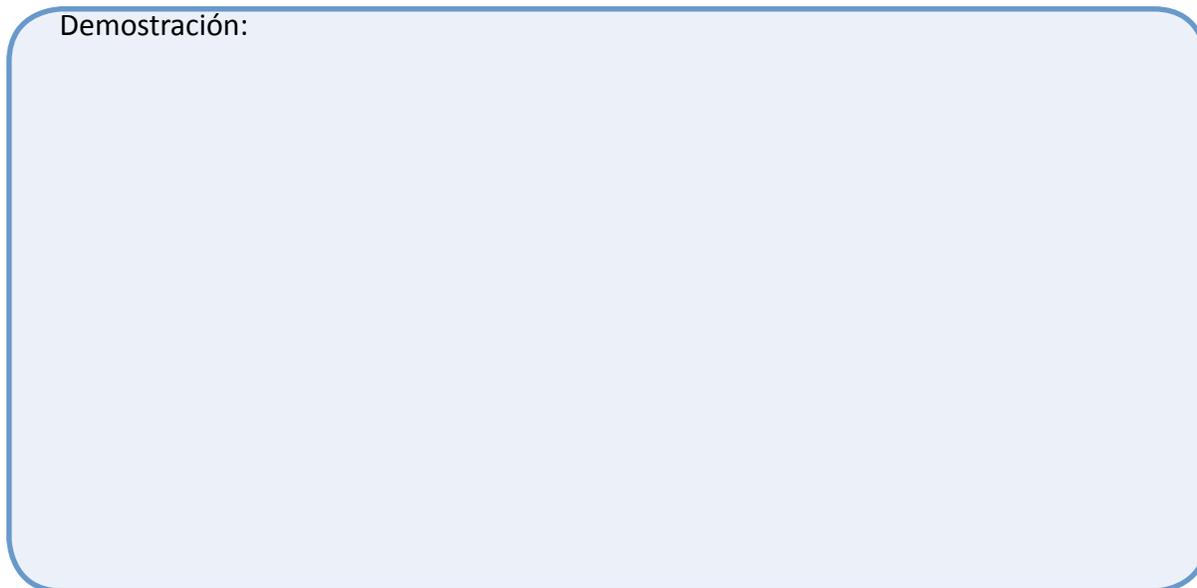
Analizamos y definimos la recta en el espacio tridimensional que presenta el texto (Lázaro M., 2012) *“Geometría en el Espacio Euclidiano R3”* (Pág. 49 - 62) y el video: *“Ecuación de la recta en el espacio”* (00:01 - 04:42 min.) y consideramos diferentes tipos de ecuaciones de la recta como ser: ecuación vectorial de la recta, ecuación paramétrica, ecuación simétrica y ecuación general de la recta. A partir de todo lo anterior en el siguiente espacio sintetizamos todo lo asimilado:



## 3. Distancia de un punto a una recta

En geometría analítica ya se desarrolló lo relacionado a la distancia de un punto a una recta en el plano, ahora, demostramos la fórmula distancia de un punto a una recta con la en el espacio, para ello nos ayudamos con el texto (Lázaro M., 2012) *“Geometría en el Espacio Euclidiano R3”* (Pág. 67 - 70), aquí podremos analizar elementos importantes para la demostración, tal es el caso de las “proyecciones”.

Demostración:



#### 4. Distancia entre dos rectas

Determinamos la fórmula de la distancia entre dos rectas a partir del diálogo con el texto: (Lázaro M., 2012) *“Geometría en el Espacio Euclidiano R3”* (Pág. 63), del texto extraemos los elementos necesarios y útiles para la demostración.

Demostración:

#### 5. El plano y ecuaciones del plano

Definimos el plano en el espacio y determinamos la ecuación de plano con ayuda del texto Lázaro M., 2012) *“Geometría en el Espacio Euclidiano R3”* (Pág. 1 - 3) y el video: *“Ecuación de un plano”* (00:01 – 08:40 min.), tanto en el texto como en el video podremos apreciar, analizar y estudiar diferentes elementos matemáticos que nos ayudarán a responder a la siguiente pregunta:

- ¿En la vida cotidiana donde se observa el plano? ¿Cuál es la aplicación de la ecuación del plano en la vida?

Escribimos las ecuaciones del plano: Ecuación del plano, vector normal a un plano, ecuación paramétrica del plano, y ecuación general (cartesiana) del plano con ayuda del texto (Lázaro M., 2012) **“Geometría en el Espacio Euclidiano R3”** (Pág. 2 - 8).

## 6. Distancia de un punto a un plano

A partir de tu experiencia y de tus conocimientos adquiridos hasta este momento, deduce la fórmula de distancia de un punto a un plano y aplicamos en diferentes problemas de aplicación con la ayuda del texto (Lázaro M., 2012) **“Geometría en el Espacio Euclidiano R3”** (Pág. 23).

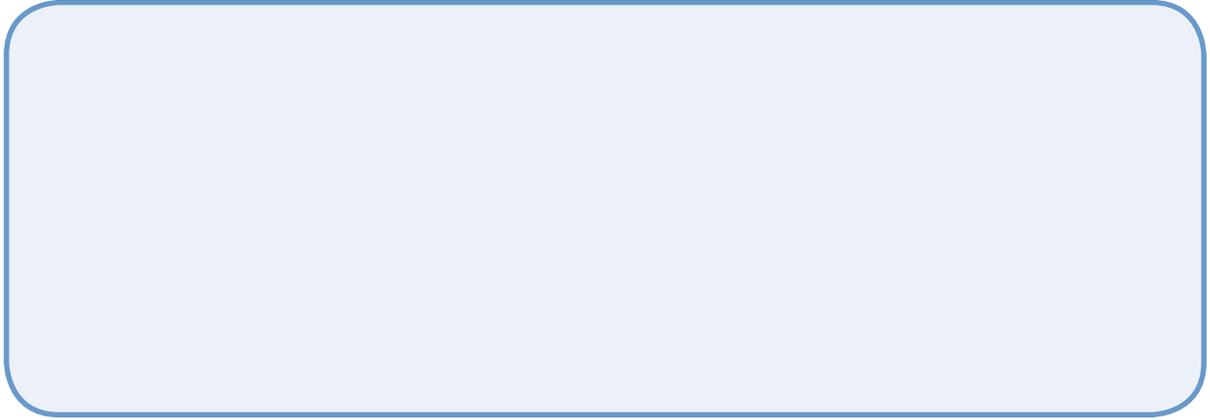
Deducción:

## 7. Superficies cuádricas, cuadráticas y esféricas

Definimos sobre superficies cuádricas y otros que se presentan en el texto (Lázaro M., 2012)

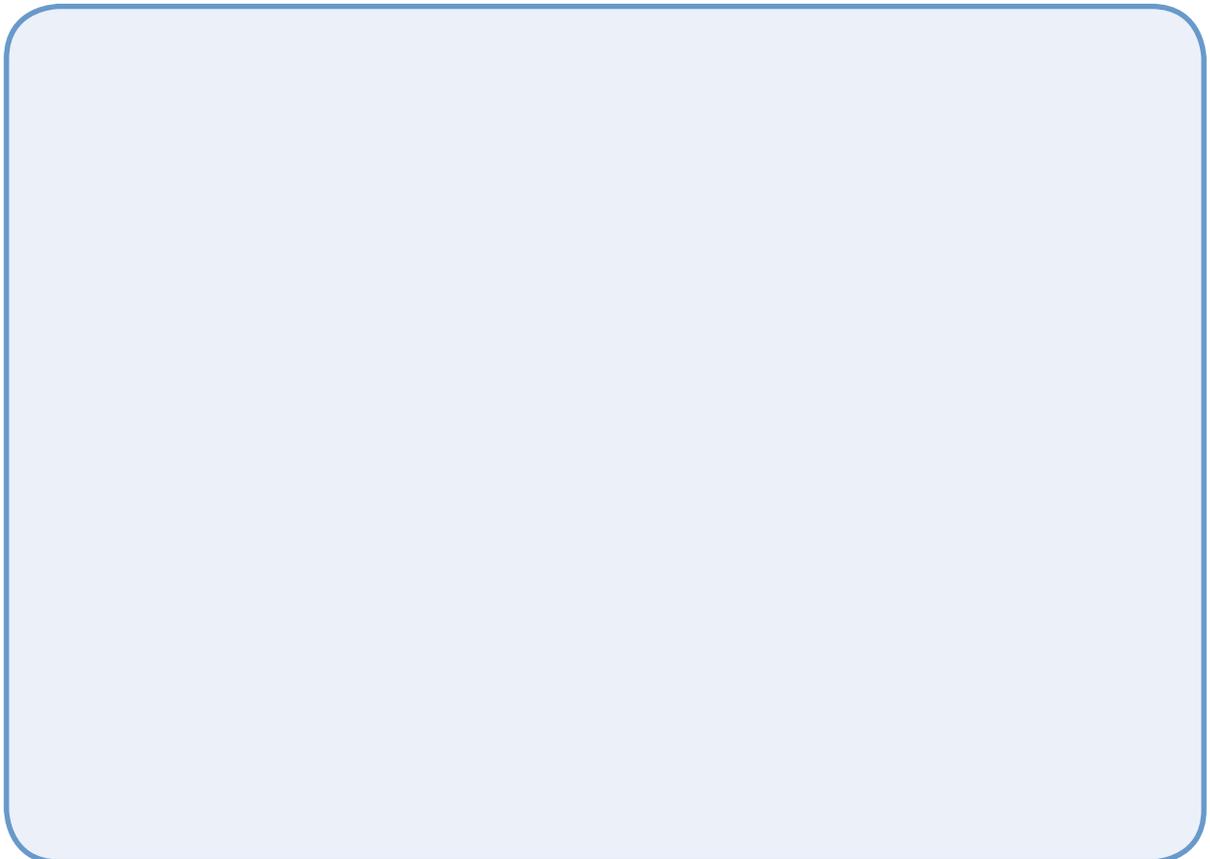


**“Geometría en el Espacio Euclidiano  $\mathbb{R}^3$ ”** (Pág. 141 - 173) y el video: **“Ecuaciones de las superficies cuádricas”** (00:01 – 07:20 min.). Con la ayuda del asistente matemático GEOGEBRA, construya las superficies cuádricas, y en el siguiente espacio deberá pegar la captura de pantalla del trabajo final.



## 8. Coordenadas curvilíneas

Interpretamos diferentes tipos de cuerpos de coordenadas curvilíneas con la ayuda del texto (Lázaro M., 2012) **“Geometría en el Espacio Euclidiano  $\mathbb{R}^3$ ”** (Pág. 173) y relacionamos con los ejemplos de nuestro contexto.



## Tema 3

### Cálculo Diferencial en $\mathbb{R}^n$



*“La ciencia es orgullosa por lo mucho que ha aprendido; la sabiduría es humilde porque no sabe más”.*

*William Cowper*

El cálculo diferencial es una parte importante del análisis matemático y dentro del mismo cálculo. Consiste en el estudio del cambio de las variables dependientes cuando cambian

las variables independientes de las funciones o campos objetos del análisis.

Sus aplicaciones son difíciles de contar porque toda la matemática moderna, de una u otra forma, ha recibido su influencia; y las diferentes partes del andamiaje matemático interactúan constantemente con las ciencias naturales y la tecnología moderna.

El cálculo diferencial, se puede aplicar en la economía, la administración, la física, etc. Los principales elementos que se utilizan en esta rama de las matemáticas, son las funciones, las derivadas, los sistemas de ecuaciones, la pendiente, entre otros; que estos a su vez en conjunto ayudan a realizar grandes cálculos en importantes empresas, o simples operaciones en la economía familiar.

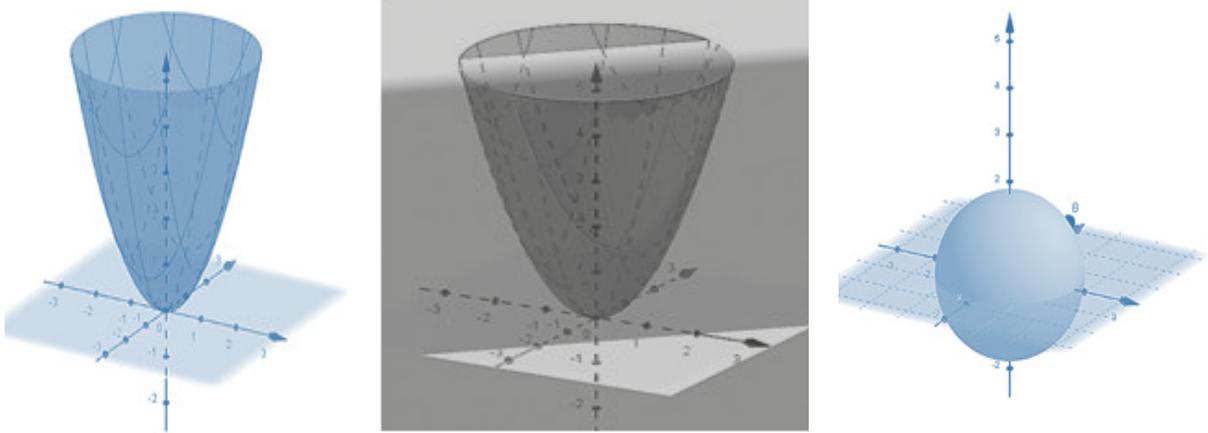
Las principales aplicaciones del cálculo diferencial son:

- El estudio de movimientos, aspectos de velocidad, y aceleración
- Análisis de ecuaciones con binomios.
- El cálculo de máximos y mínimos.
- Determinación de longitudes, áreas y volúmenes

Por ejemplo: en una agencia de viajes, o en una empresa, saber cuál es la mayor ganancia que se puede obtener en cierto período, o con cierto producto, pero a la vez, igualmente calcular, si existen pérdidas en estos productos, o en un lapso de tiempo. Si se aplica de manera correcta

el cálculo diferencial, se podrán obtener estos resultados, sin ningún problema.

Observemos las gráficas construidas con el asistente GEOGEBRA:



## Profundización a partir del diálogo con los autores y el apoyo bibliográfico

### 1. Funciones con varias variables

Definimos sobre las funciones de dos variables a partir del texto (Mejía R., 2000) *“Cálculo II”* (Pág. 166) y el video: *“Derivadas parciales-Introducción”* (00:01 - 15:31 min.) ambas bibliografías nos presentan una introducción sobre las funciones de más de dos variables y las derivadas de éstas. A partir de todo ello analizamos su interpretación gráfica en el plano y espacio tridimensional.

Definición y análisis:

## 2. Límites

Encontramos derivadas parciales a partir de la definición de límites que se explica en el texto de (Mejía R., 2000) *“Cálculo II”* (Pág. 192), ponemos a prueba nuestros conocimientos y resolvemos problemas de aplicación.

## 3. Regla de derivación

En nuestra sociedad y/o comunidad ¿A qué denominamos REGLA? Responda a partir de su experiencia:

.....

.....

.....

.....

.....

De forma similar a su respuesta, en matemática las reglas son consideradas como métodos que ayudan a realizar una operación matemática. Ahora obtenemos diferentes reglas de derivación de funciones de varias variables que nos presentan y explican el siguiente libro y video respectivamente: (Chungara V., 2015) *“Cálculo II”* (pág. 95), video *“Derivadas parciales-Ejercicios”* (00:01- 11:09 min.). A partir de lo asimilado, en el siguiente cuadro demostramos algunas reglas de derivación.



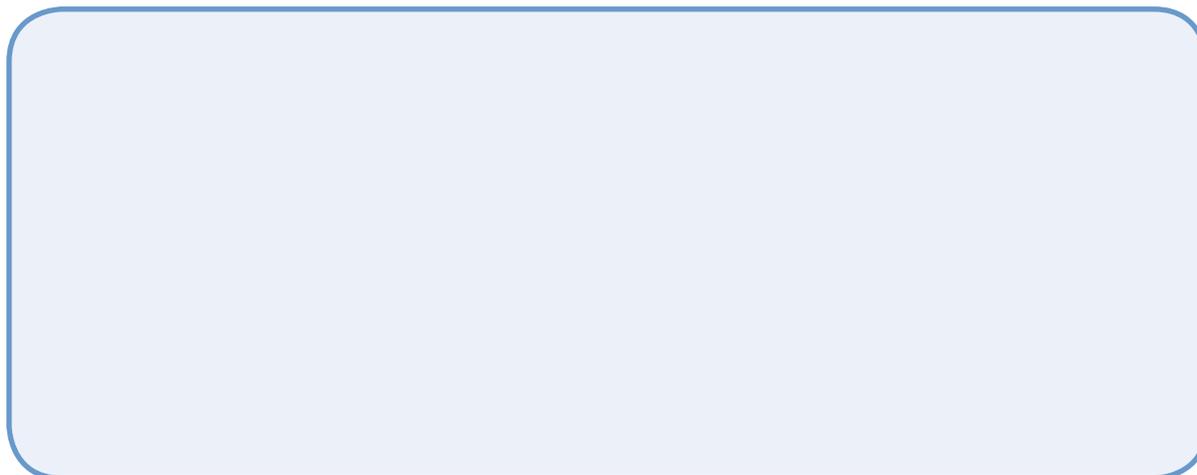
Demostraciones:

#### 4. Derivadas parciales de orden superior

Analizando el texto (Chungara V., 2015) "*Cálculo II*" (Pág. 97), podremos desarrollar derivadas parciales de orden superior, puesto que en la bibliografía se presenta variedad de ejemplos y definiciones que podemos aplicar en la resolución de este tipo de derivadas.

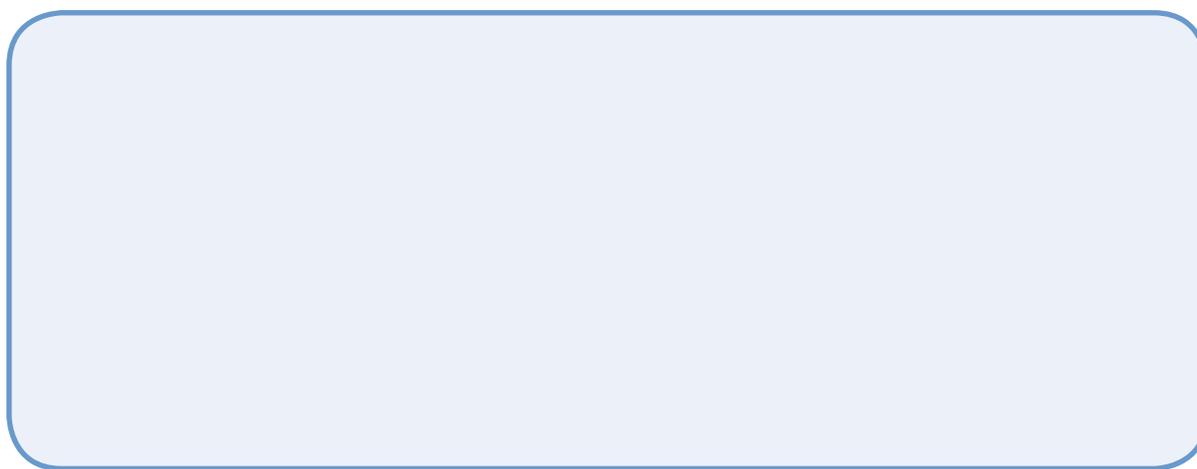
## 5. Diferenciales

Analizamos las “diferenciales” y “diferenciales de orden superior” con la ayuda del texto: (Chungara V., 2015) *“Cálculo II”* (Pág. 100), luego del análisis será importante que en el siguiente espacio se pueda hacer una síntesis o explicación breve y con ejemplos, acerca de lo que se trata estas diferenciales.



## 6. Regla de la cadena

A partir de lo asimilado en el subtítulo anterior, aplicamos la regla de la cadena en la resolución de los ejercicios propuestos en el texto: (Chungara V., 2015) *“Cálculo II”* (Pág. 102), comparamos el resultado obtenido con el resultado del texto.

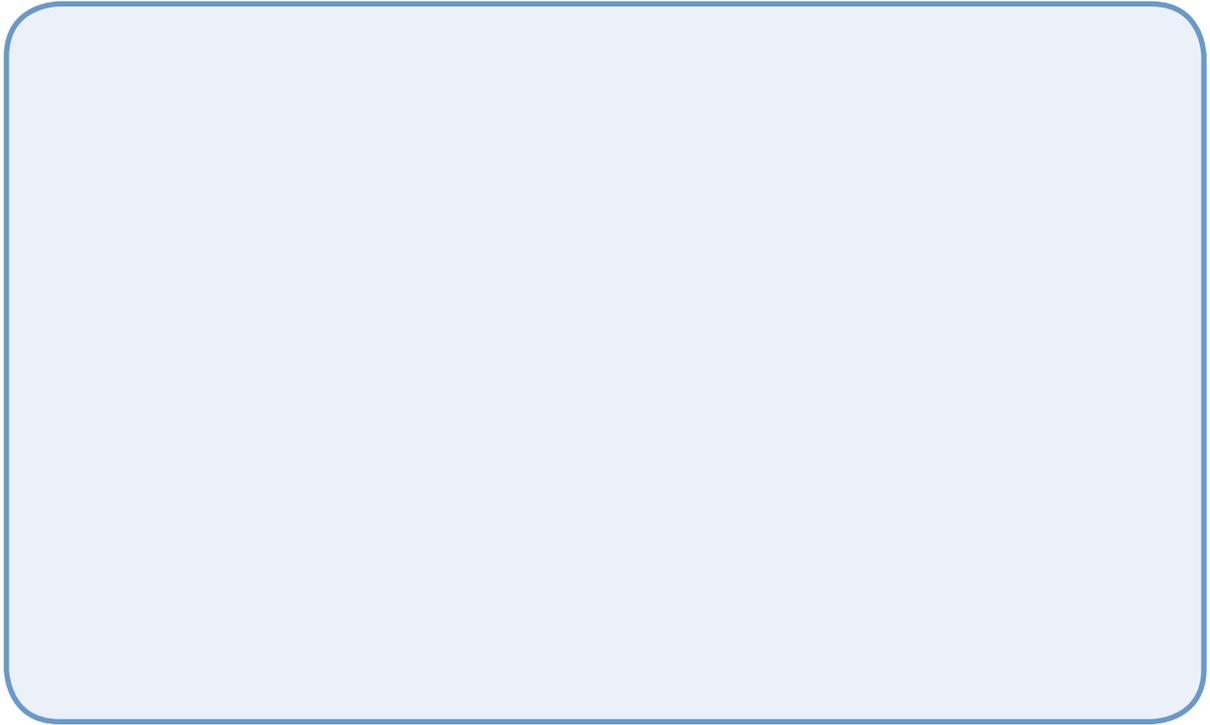


## 7. Derivación implícita

Comprendemos y resolvemos, diferentes tipos de ejercicios aplicando derivación implícita con la ayuda del libro (Chungara V., 2015) *“Cálculo II”* (Pág. 104), en la bibliografía podremos encontrar ejemplos y definiciones sobre la derivación implícita que a partir de ello podremos

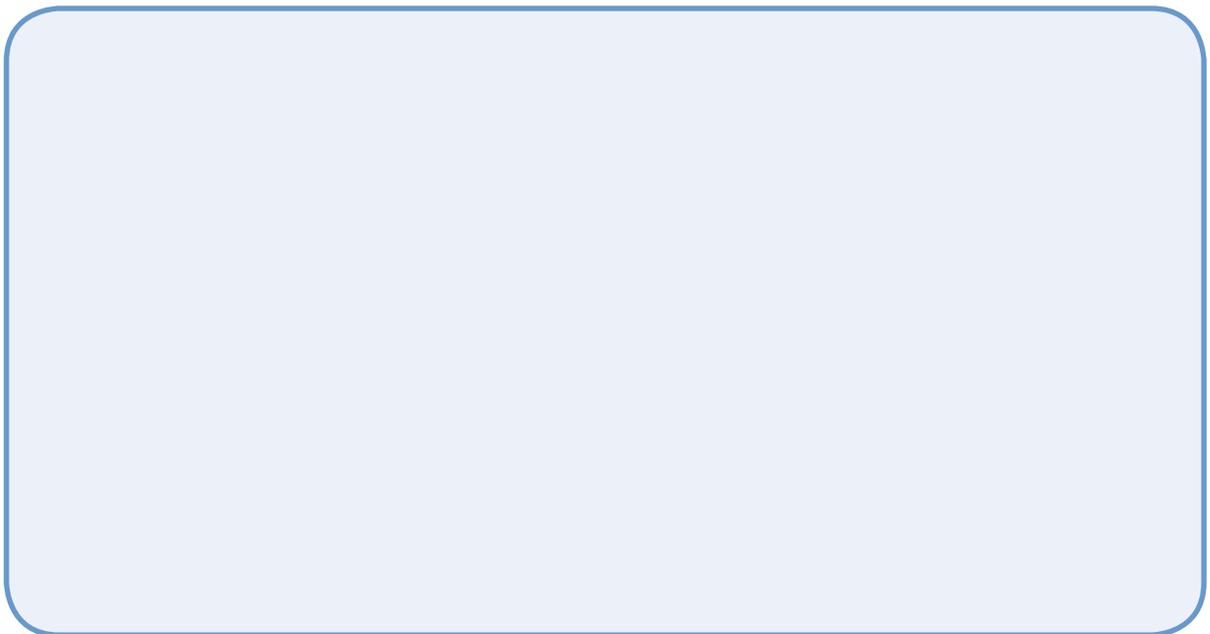


resolver los ejercicios propuestos.



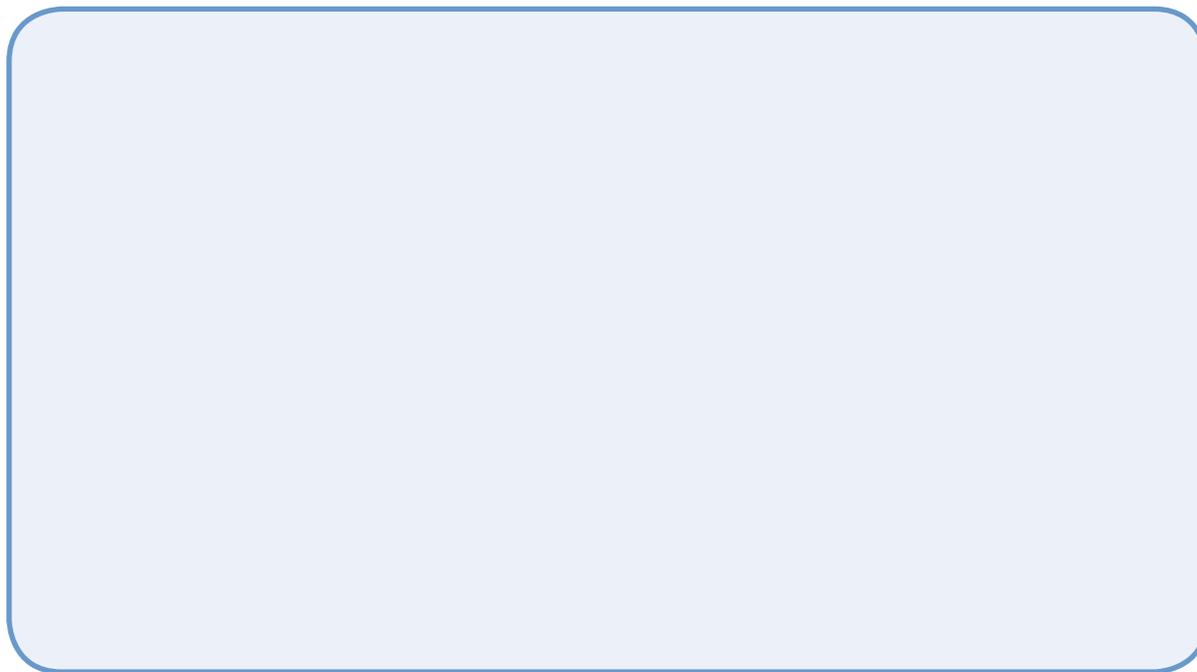
## 8. Jacobianos

Analiza y define Jacobianos y sus propiedades para desarrollar diferentes tipos de ejercicios con la ayuda del texto: (Chungara V., 2015) "*Cálculo II*" (Pág. 107), en el texto podrás encontrar explicaciones claras sobre lo que son los Jacobianos y así poder resolver ejercicios relacionados a este.



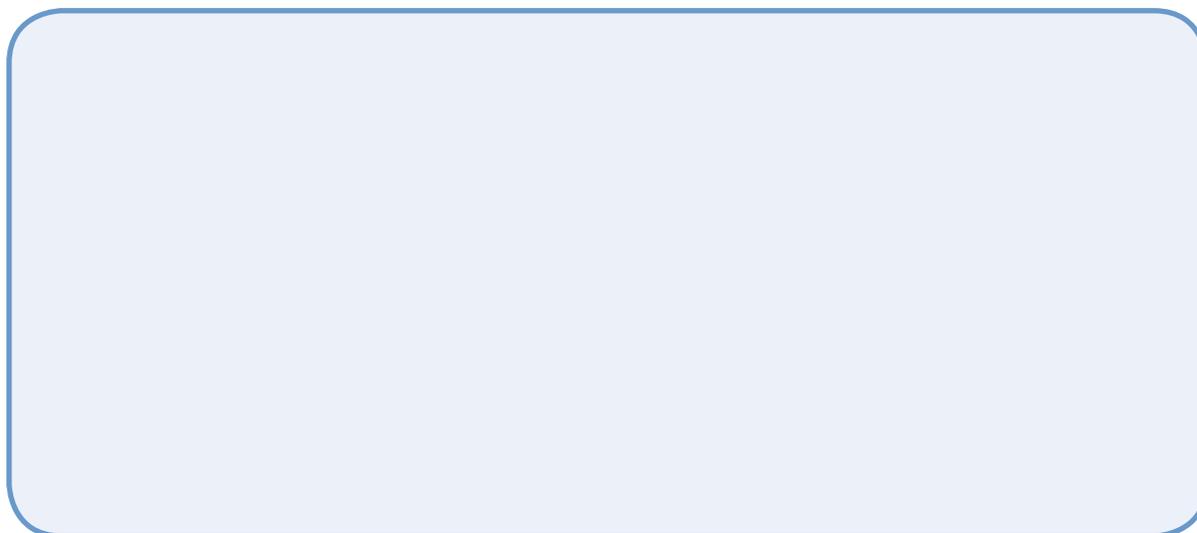
## 9. Funciones homogéneas teorema de Euler

Indagamos sobre funciones homogéneas partir del teorema de Euler con ayuda del texto: (Chungara V., 2015) *“Cálculo II”* (Pág. 110), posteriormente, todo lo asimilado lo aplicamos en diferentes ejercicios propuestos.



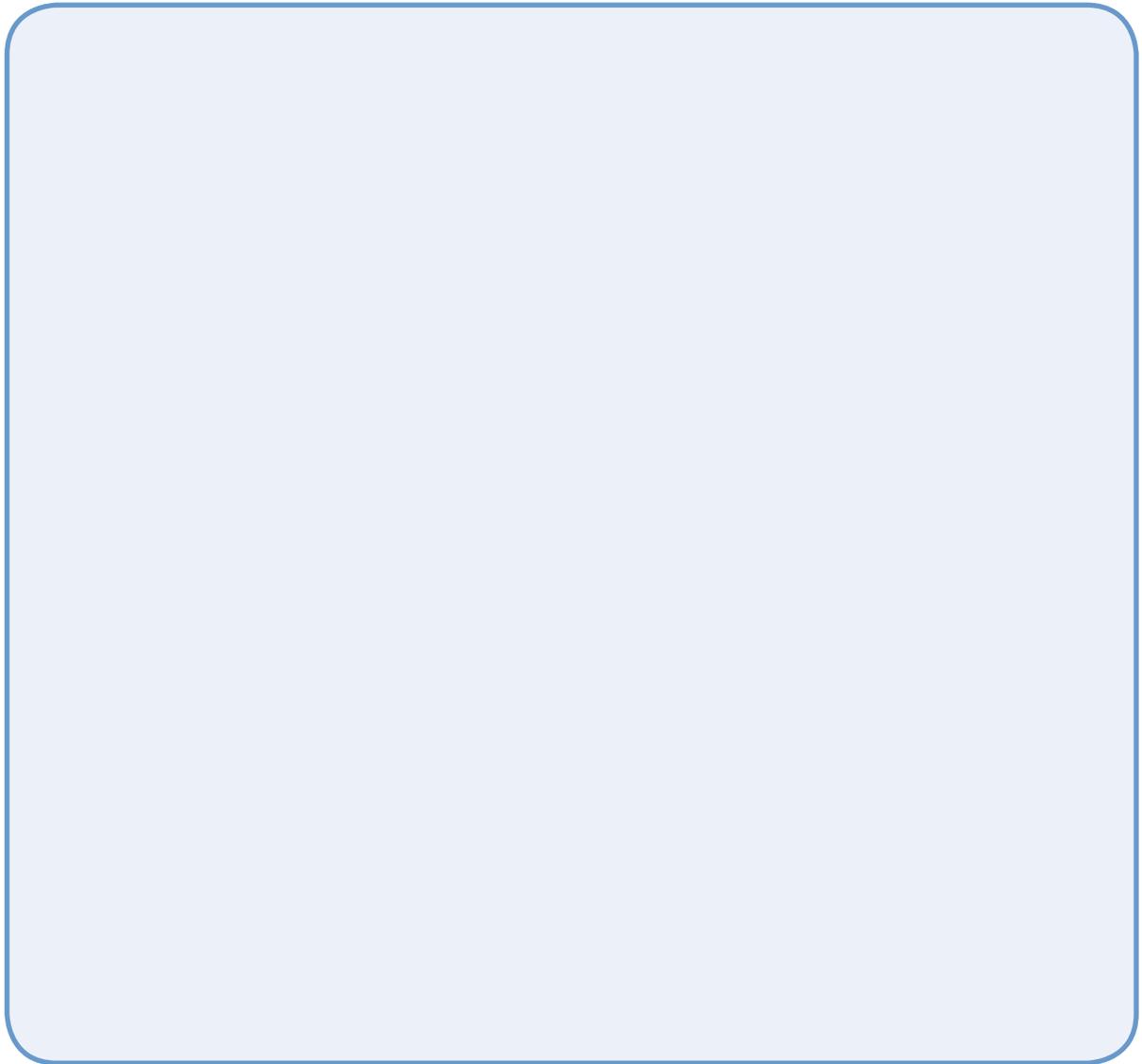
## 10. Teorema de valor medio y de Taylor

Analizamos el teorema de valor medio y el teorema de Taylor con la ayuda de (Chungara V., 2015) *“Cálculo II”* (Pág. 111) y el video: *“Puntos críticos de una función de dos variables”*, (00:01 - 15:30 min.) luego respondemos a la siguiente cuestionante: ¿Cómo podemos relacionar los puntos críticos de una función, con nuestro contexto?



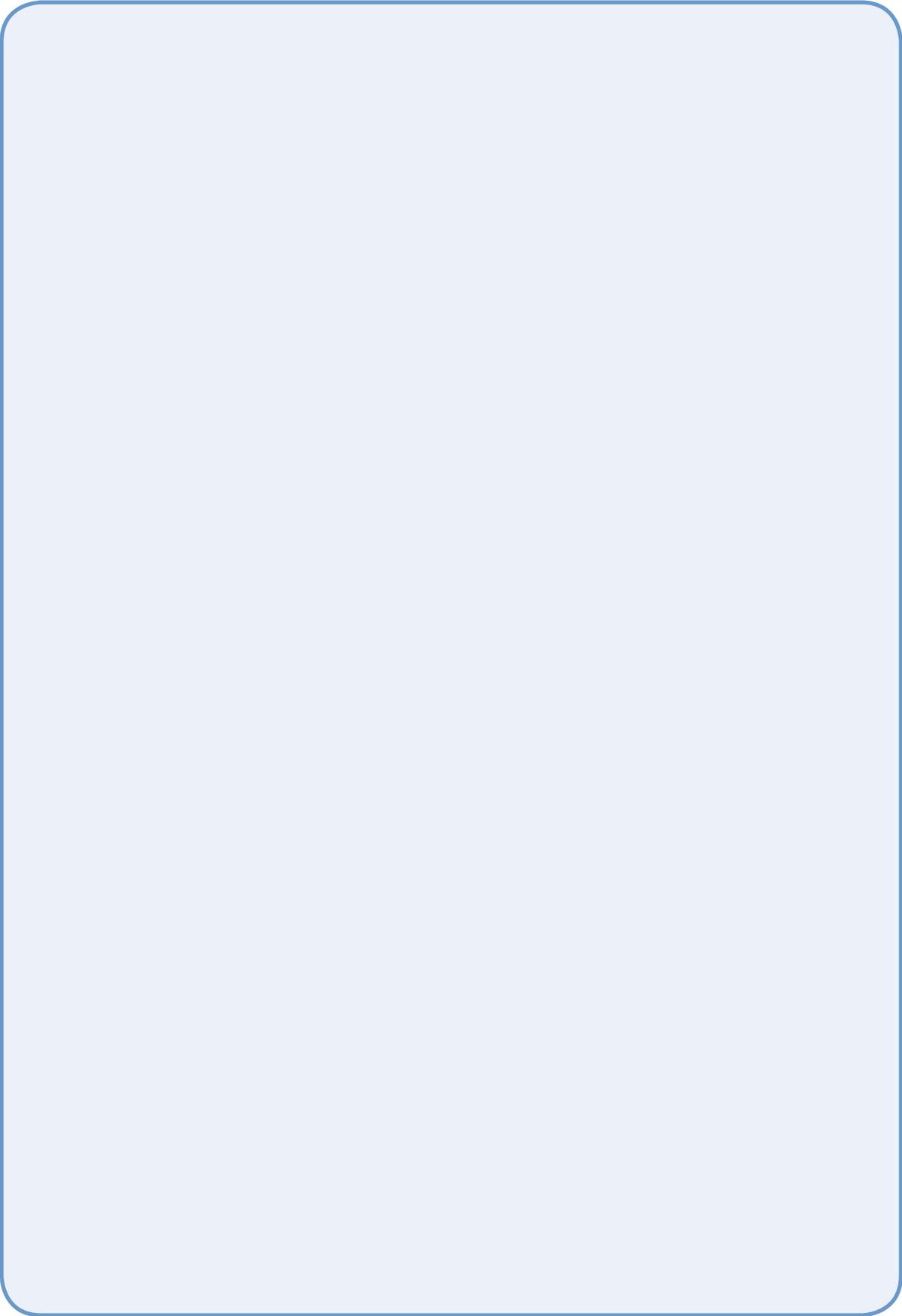
## 11. Interpretación geométrica de las derivadas parciales

Interpreta geoméricamente las derivadas parciales en el plano y en espacio tridimensional y dialogamos con el texto (Chungara V., 2015) *“Cálculo II”* (Pág. 112) y el video: *“Plano tangente y recta normal a la superficies”*, (00:01 - 12:45min.) luego de la interpretación construir la gráfica con la ayuda del asistente matemático GEOGEBRA, una vez realizado esto, pega la captura de pantalla en el siguiente espacio, para poder visualizar el producto.



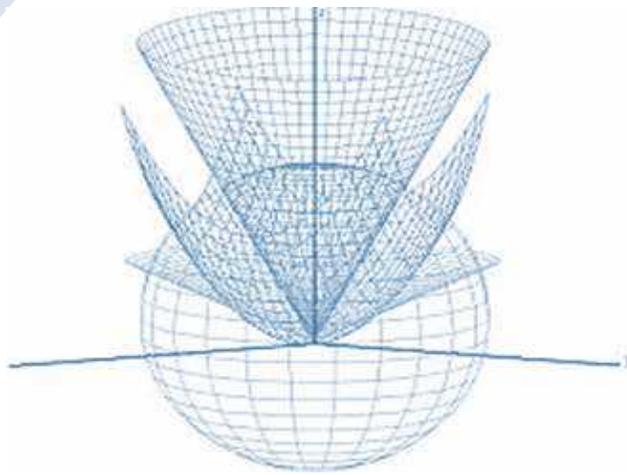
## 12. Aplicaciones de derivadas parciales

Resolvemos diferentes tipos de ejercicios donde aplicamos los puntos crítico, Hessiano, criterio de la segunda derivada según el texto: (Chungara V., 2015) *“Cálculo II”* (Pág. 125-134) y los video: *“Aplicación de derivadas Máximos y Mínimos”* (00:01 – 06:50 min.) y video: *“Optimización: Volumen de una caja sin tapa”*. En ambas bibliografías podrás encontrar diferentes elementos importantes para estas aplicaciones.



## Tema 4

### Integrales Múltiples



*La ciencia se basa en evidencias demostrables. La fe religiosa no sólo carece de evidencias, su independencia de las evidencias es su orgullo y regocijo gritado a los cuatro vientos*

*Richard Dawkins*

De la misma manera en que la integral de una función positiva  $f(x)$  de una variable definida en un intervalo puede interpretarse como el área entre la gráfica de la función y el eje  $x$  en ese intervalo, la doble integral de una función positiva  $f(x,y)$  de dos variables,

definida en una región del plano  $xy$ , se puede interpretar como el volumen entre la superficie definida por la función y el plano  $xy$  en ese intervalo. Al realizar una “integral triple” de una función  $f(x,y,z)$  definida en una región del espacio  $xyz$ , el resultado es un hipervolumen, sin embargo es bueno notar que si  $f(x,y,z) = 1$  el resultado se puede interpretar como el volumen de la región de integración. Para integrales de órdenes superiores, el resultado geométrico corresponde a hipervolumenes de dimensiones cada vez superiores.

*“La manera más usual de representar una integral múltiple es anidando signos de integración en el orden inverso al orden de ejecución (el de más a la izquierda es el último en ser calculado), seguido de la función y los diferenciales en orden de ejecución. El dominio de integración se representa sobre cada signo de integral, o a menudo es abreviado por una letra en el signo de integral de más a la derecha:*

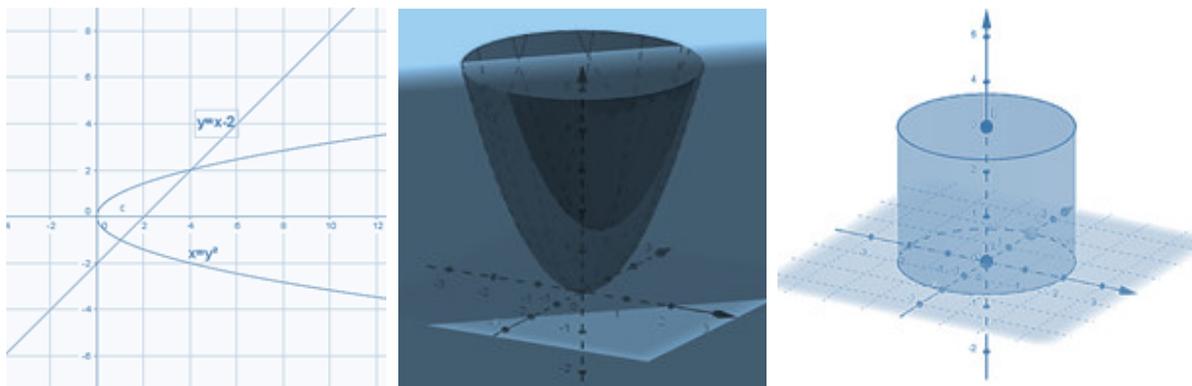
$$\int \dots \iint_D (x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots x_n$$

*Es importante destacar que no es posible calcular la función primitiva o antiderivada de una función de más de una variable por lo que las integrales múltiples indefinidas no existen”.*

[https://es.wikipedia.org/wiki/Integral\\_múltiple](https://es.wikipedia.org/wiki/Integral_múltiple)

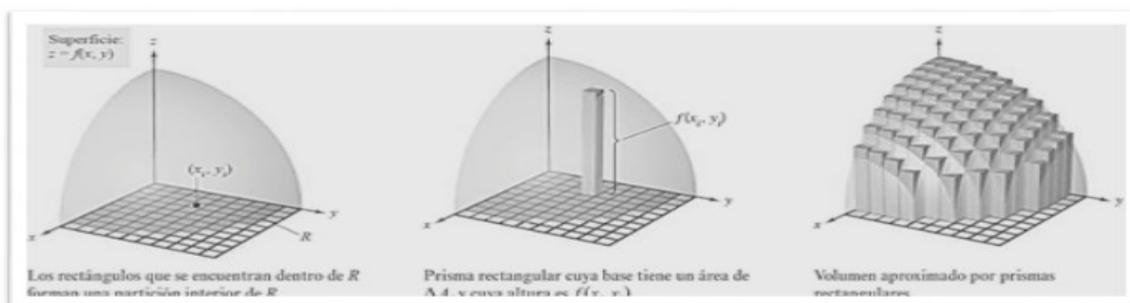
Los integrales múltiples tienen su aplicación para calcular: el volumen de un sólido en el espacio, masa de un sólido en el espacio, momentos estáticos de un sólido en el espacio, centro de masa de un sólido en el espacio y momentos de inercia de un sólido en el espacio y otros.

Observamos las siguientes gráficas construidas con el asistente GEOGEBRA:



### Profundización a partir del diálogo con los autores y el apoyo bibliográfico

#### 1. Integrales dobles



Observamos e interpretamos integrales dobles y su gráfica, con el apoyo del texto: (Chungara V., 2015) “Cálculo II” (Pág. 155) y el video: “**Integrales dobles Parte 1**” (00:01 - 13:23 min.), luego respondemos a las siguientes interrogantes: ¿Qué características tiene un integral doble? ¿Cómo simbolizamos el teorema de Fubini?

## 2. Integrales dobles sobre regiones generales

Resolvemos ejercicios de integrales dobles en una región dada, según el texto: (Mejía R., 2000) "*Cálculo II*" (Pág. 336) y el video "*Solución de una integrale doble*" (00.01 – 05:48 min.), luego de resolver los ejercicios, con el software GEOGEBRA construya gráficas de las regiones dadas en el texto y video citado.

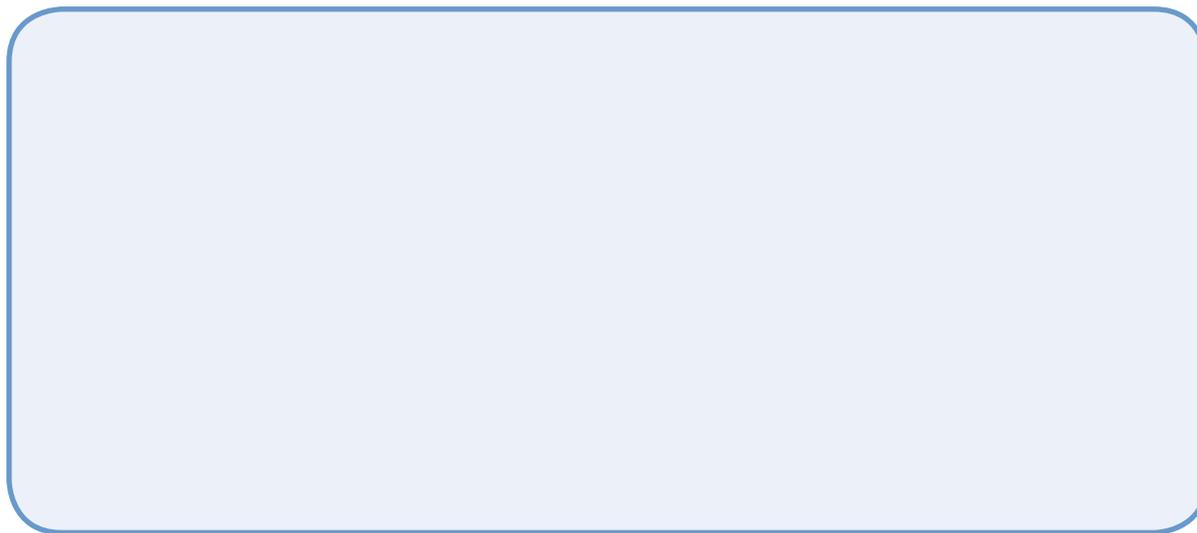
## 3. Cambio de orden de integración

Realizamos el "cambio de orden de integración" en la integral doble con la ayuda del texto (Mejía R., 2000) "*Cálculo II*" (Pág. 350). Luego, desarrollamos ejercicios propuestos, aplicando todo lo asimilado a partir de la lectura del texto citado.



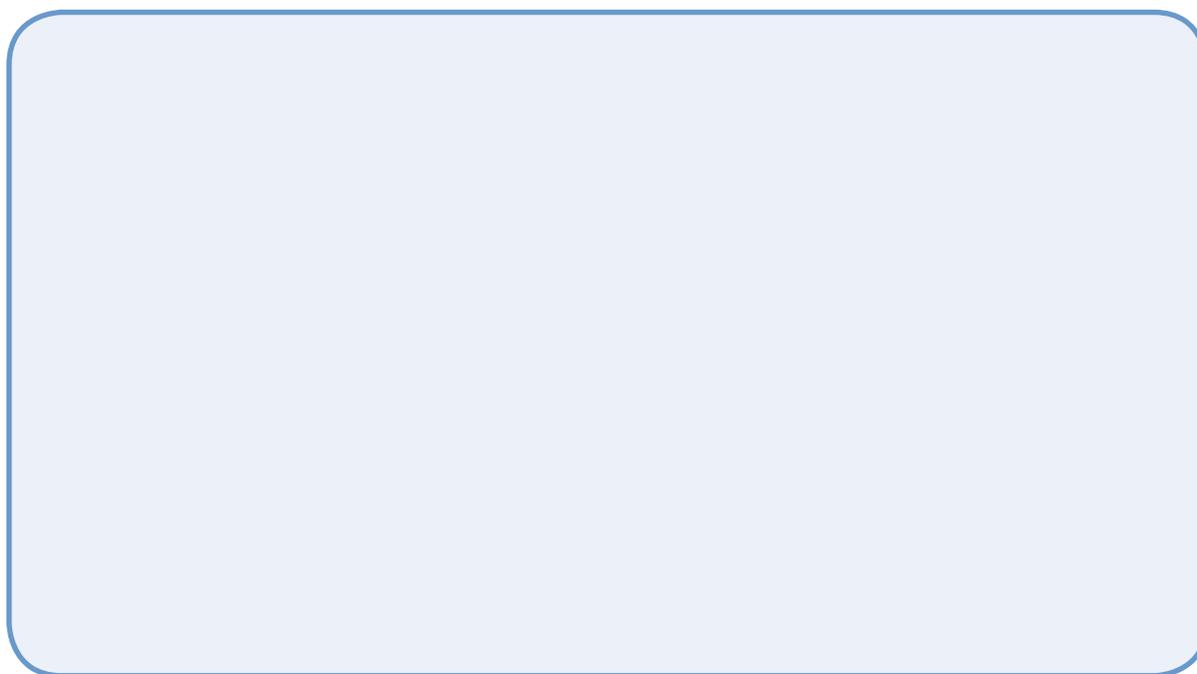
#### 4. Cambio de variable en la integración doble

Para su mejor comprensión realizamos cambio de variable en la integración, de acuerdo a lo que explica (Mejía R., 2000) *“Cálculo II”* (Pág. 362) y el video: *“Cambio de variable en integrales dobles”*, (00:01 – 14:48 min.), aplicamos lo asimilado y utilizamos para este cambio de variable, la fórmula de la matriz Jacobiana.



#### 5. Integración doble en coordenadas polares

Definimos e interpretamos integrales dobles en coordenadas polares y relacionamos con coordenadas rectangulares según el texto (Mejía R., 2000) *“Cálculo II”* (Pág. 371). Calculamos integrales dobles a partir de coordenadas polares, aplicando la matriz Jacobiana.



## 6. Cálculo de áreas de figuras planas

Dentro de las aplicación de integrales en la Unidad de Formación “Cálculo en R2 Aplicada a la Tecnología” desarrollamos el cálculo de áreas planas, pero ahora calculamos áreas determinadas por una región R, con la ayuda del texto (Mejía R., 2000) “*Cálculo II*” (Pág. 379).

Utiliza

$$A = \iint_R dA$$

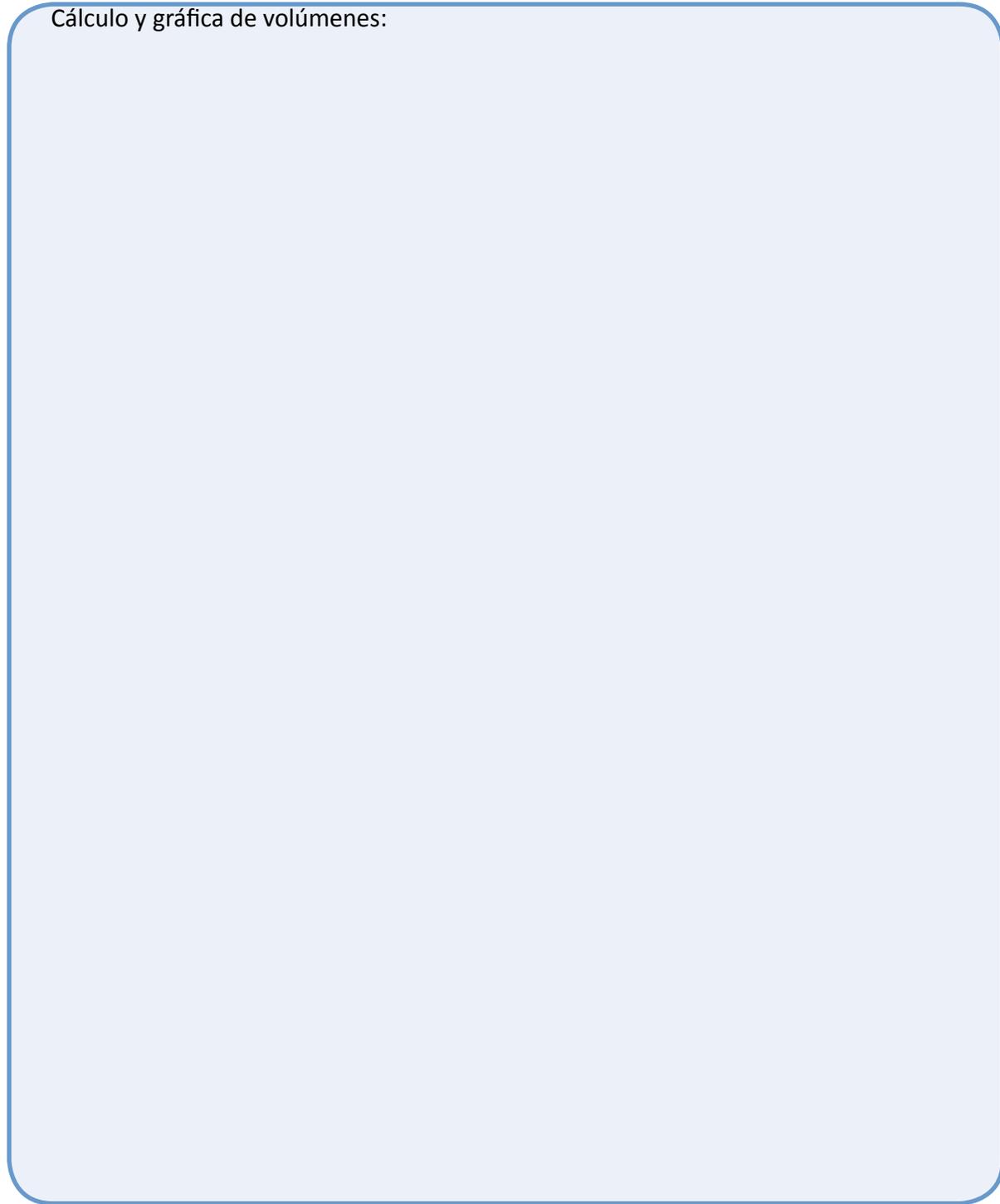
## 7. Cálculo de volúmenes

Calculamos volúmenes de diferente cuerpos geométricos relacionando ejemplos de volúmenes de nuestro contexto con la ayuda del texto: (Mejía R., 2000) “*Cálculo II*” (Pág. 385), utilizando:

$$V = \iint_R z dA$$

Luego, con la ayuda del asistente matemático GEOGEBRA, construimos gráficas relacionadas al cálculo de volúmenes.

Cálculo y gráfica de volúmenes:

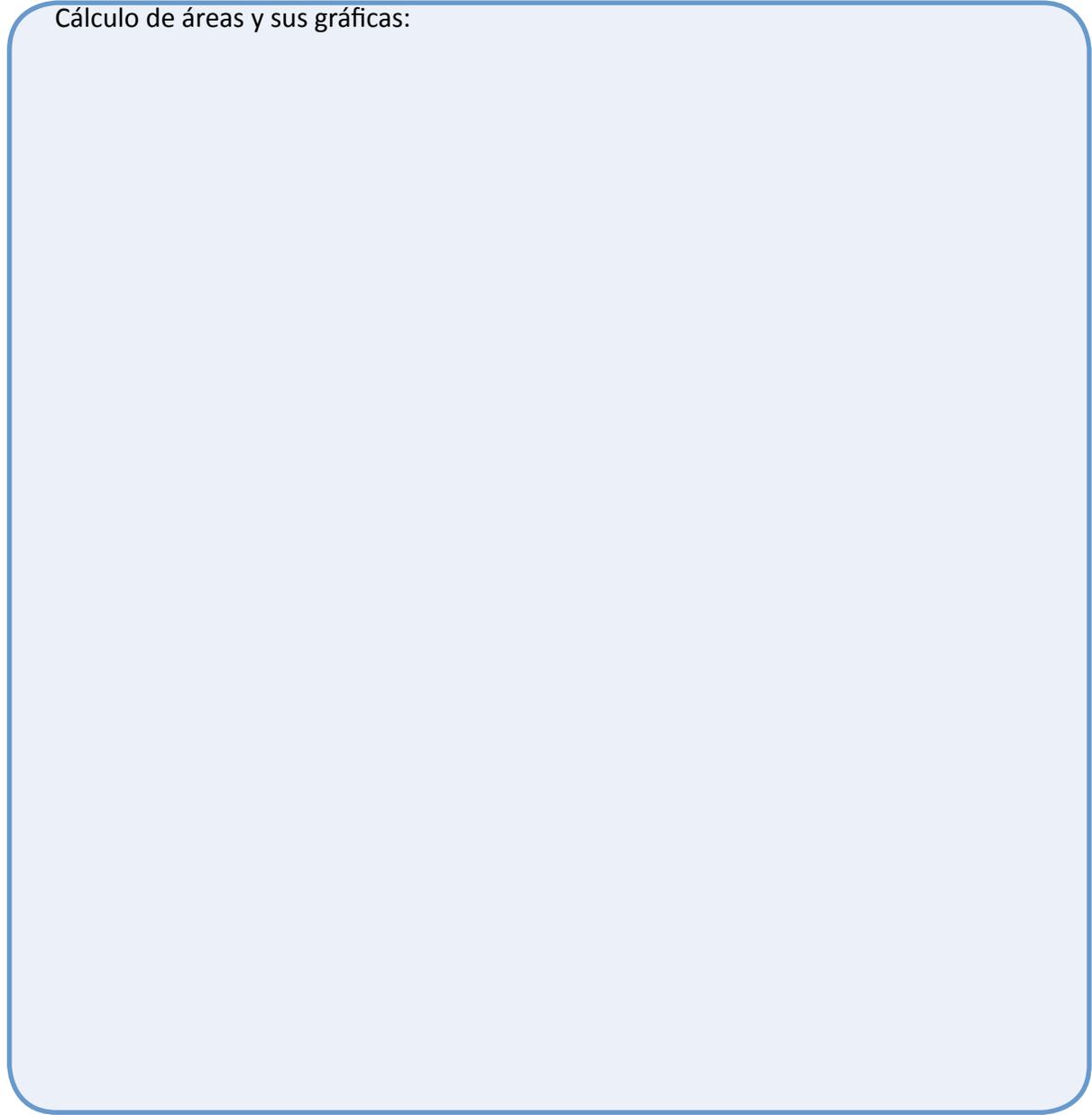


### 8. Cálculo de áreas de superficies

Calculamos áreas de superficies dadas o limitadas por una región  $R$ , con la ayuda de las definiciones y ejemplos de texto: (Mejía R., 2000) **“Cálculo II”** (Pág. 399), paralelamente al cálculo de áreas, construimos gráficas.



Cálculo de áreas y sus gráficas:

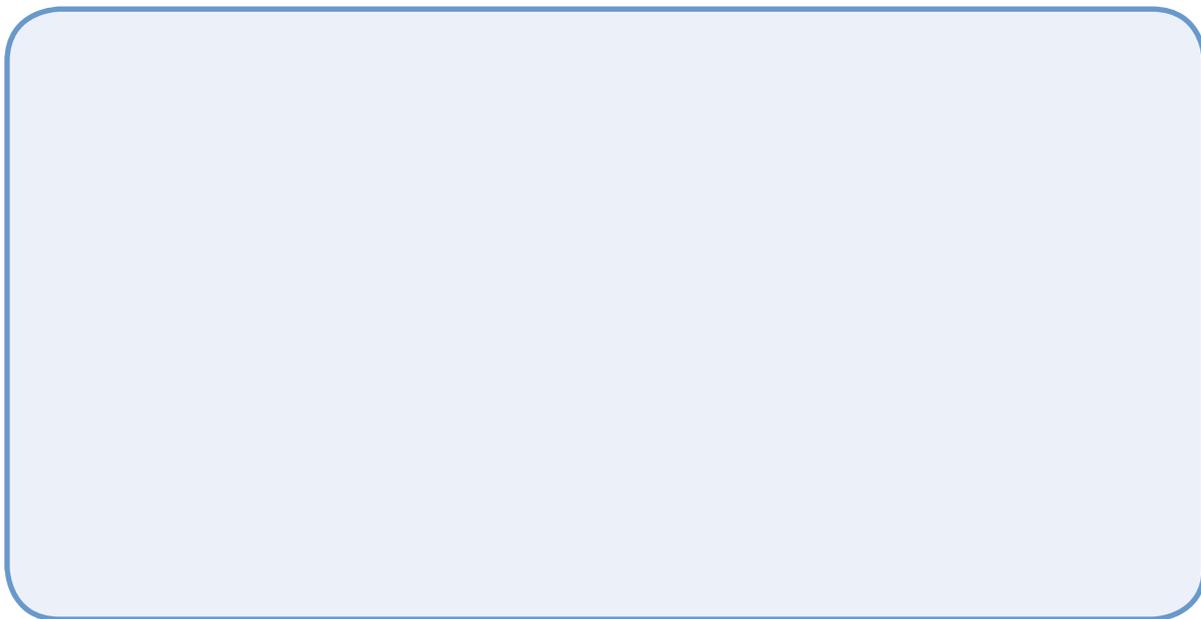


## 9. Integral triple

Resolvemos diferentes tipos de integrales triples y comparamos con la ayuda del texto: (Mejía R., 2000) *“Cálculo II”* (Pág. 414) y el video: *“Ejercicio de integral triple”*, (00:01 - 06:09 min.) aplicando la fórmula:

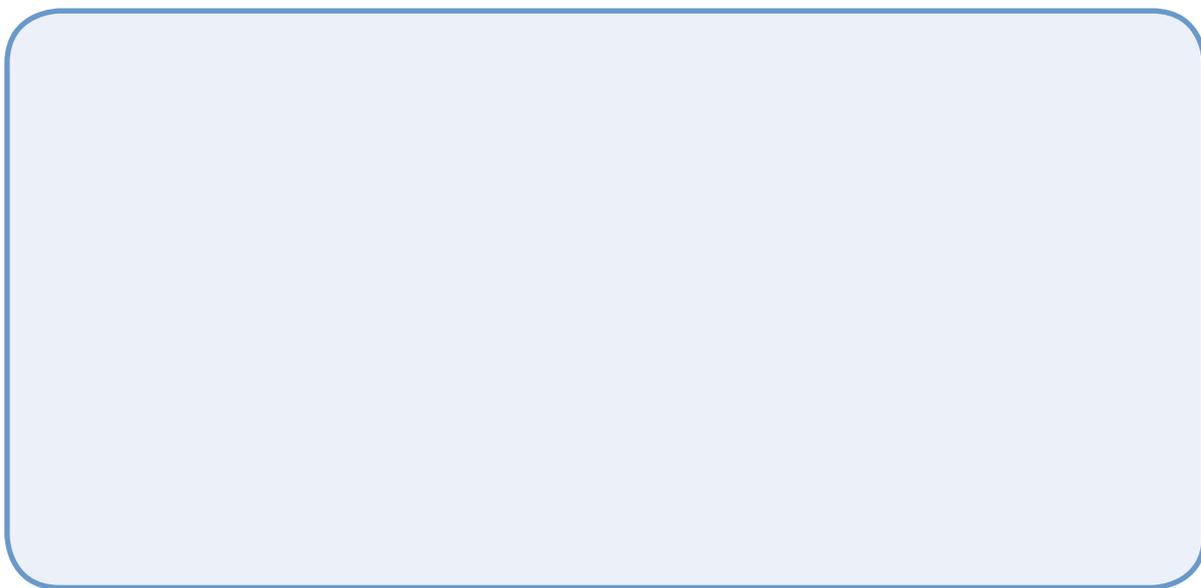
$$\iiint_{\mathcal{Q}} f(x, y, z) dV$$

Del texto citado, extraemos los ejercicios para su resolución:



### 10. Integral triple en coordenada cilíndricas

Interpretamos integrales triples en coordenadas cilíndricas con la ayuda el texto (Mejía R., 2000) **“Cálculo II”** (Pág. 438). Resolvemos ejercicios propuestos por el autor del texto, aplicando nuestros conocimientos.



### 11. Integral triple en coordenadas esféricas

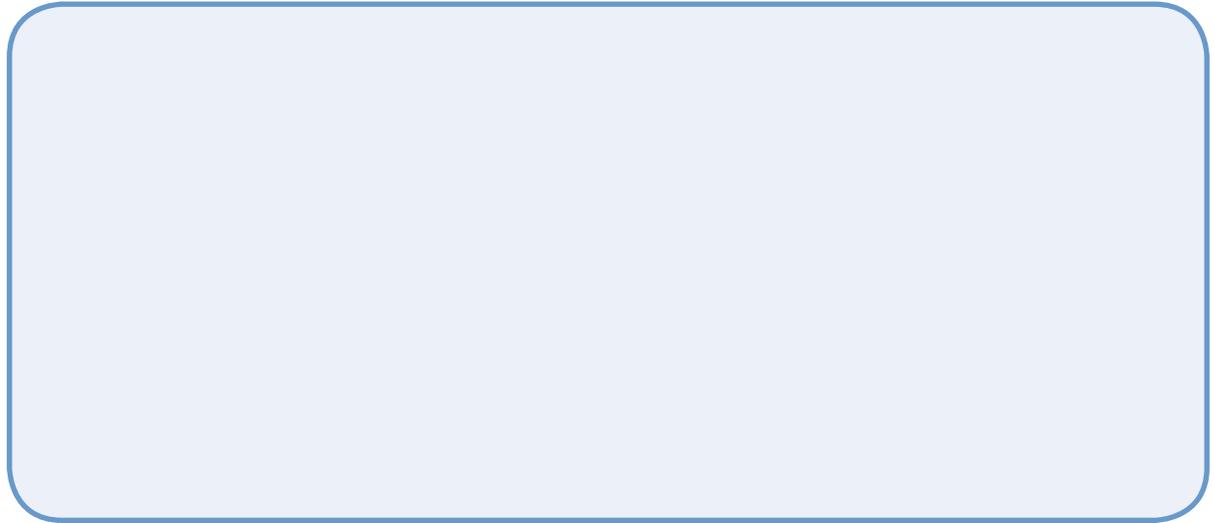
Interpretamos integrales triples en coordenadas esféricas que nos presentan el texto (Mejía R., 2000) **“Cálculo II”** (Pág. 442) y el video: **“Aplicación de integrales triples Coordenadas Esféricas”** (00.01 – 09:15 min.). En el siguiente espacio anotamos la interpretación:



## 12. Volumen con integral triple

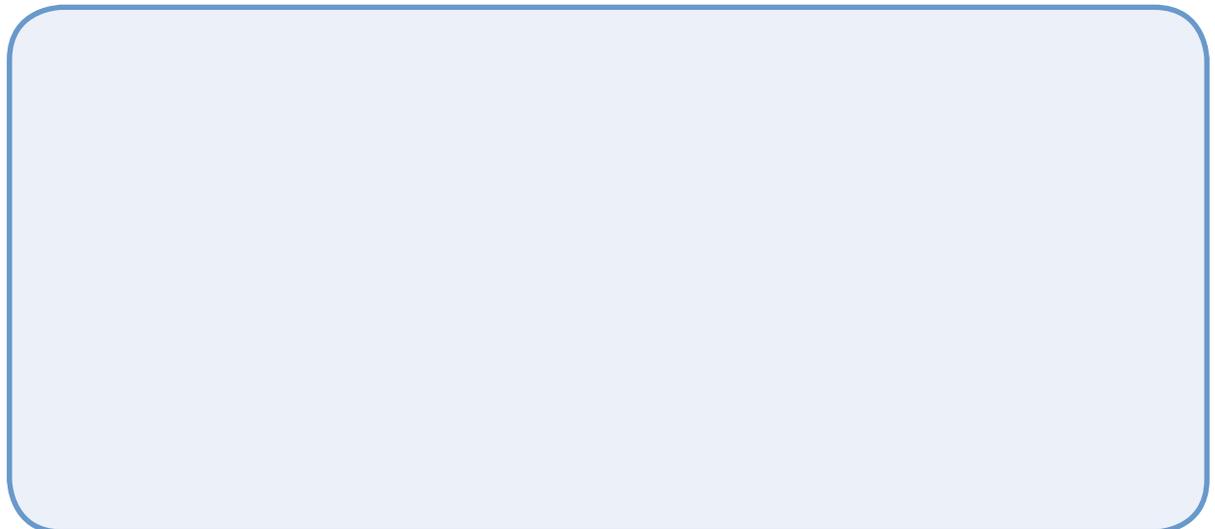
Calculamos volúmenes de diferentes cuerpos sólidos dados, con la ayuda de las definiciones y ejemplos que presenta el texto (Mejía R., 2000) *“Cálculo II”* (Pág. 446), aplicando la fórmula:

$$V = \iiint_{\mathcal{Q}} dV$$



## 13. Cambio de variable en la integral triple

¿Qué entendemos por cambio de variable? Pues bien, según la página web Sector matemática. com: *“El cambio de variable es una técnica que nos permite pasar de una ecuación o integral complicada a otra más sencilla”*. Profundizamos nuestros conocimientos y realizamos cambio variable en la integral triple con la ayuda del texto (Mejía R., 2000) *“Cálculo II”* (Pág. 456) para luego demostrar la fórmula de integración triple en coordenadas esféricas.



**Demostración de que 0=1**

Sea la integral:

$$\int \frac{dx}{x}$$

Para resolverla por partes realizamos las siguientes identificaciones:

$$u = \frac{1}{x}$$

$$dv = dx$$

Luego:

$$du = -\frac{1}{x^2} dx$$

$$v = x$$

Por tanto:

$$\int \frac{dx}{x} = \frac{1}{x} x - \int x * \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx$$

Operando:

$$\int \frac{dx}{x} = \frac{x}{x} + \int \frac{x}{x^2} dx$$

Simplificando:

$$\int \frac{dx}{x} = 1 + \int \frac{1}{x} dx$$

La integral del primer miembro coincide con la del segundo, por lo que podemos escribir:

$$l = 1 + l$$

Y restando por "l" a ambos miembros de la igualdad, queda:

$$0 = 1$$

# Orientaciones para la Sesión de Concreción



La presente Unidad de Formación se concretizará a través de la observación y práctica en las actividades cotidianas de los contextos socioculturales referidos a la aplicación del Cálculo en  $R^n$  y la puesta en acción del PDC de los participantes en proceso de formación, orientadas al MESP.

Para el desarrollo de la Sesión de Concreción tomamos en cuenta los siguientes aspectos:

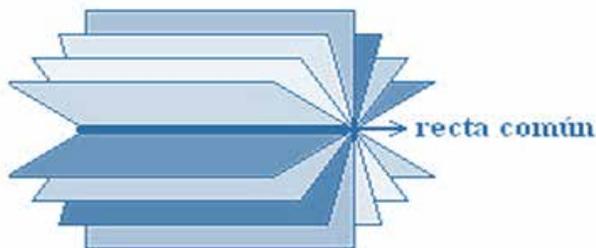
## 1. Autoformación para Profundizar las Lecturas Complementarias.

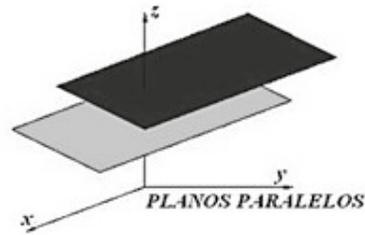
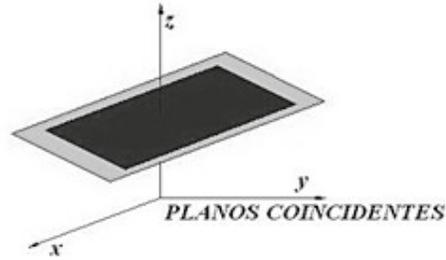
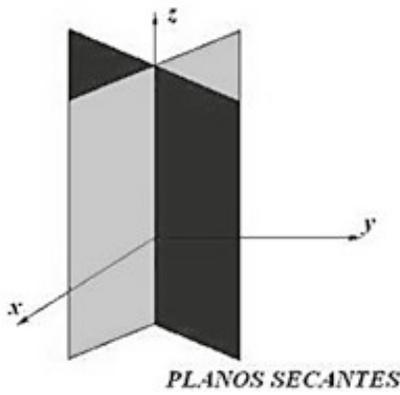
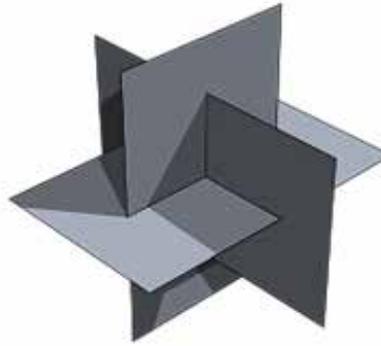
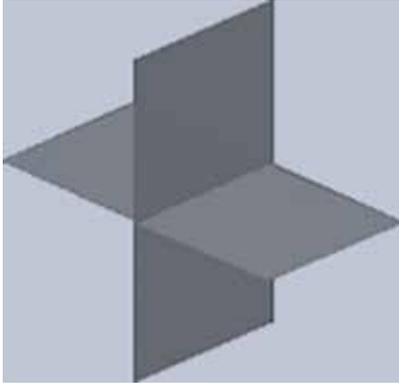
Para concretizar el proceso de autoformación, tomamos en cuenta las lecturas complementarias, básicas para profundizar los conocimientos de la Unidad de Formación. De igual manera vemos detenidamente los videos, y realizamos los ejercicios prácticos que deben ser resueltos a la brevedad posible. es recomendable acudir constantemente a la bibliografía de profundización propuesta en los anexos.

## 2. Trabajo con las y los Estudiantes para Articular con el Desarrollo Curricular y Relacionarse e Involucrarse con el Contexto

Este espacio es para mostrar tus evidencias (fotografías, actas.....entre otros), que demuestren tu participación responsable durante las sesiones de enseñanza-aprendizaje:

- Utilizando instrumentos geométricos, los conocimientos adquiridos en la bibliografía de profundización y las TIC's. Construyan en cartulina, dúplex, triplex, venesta u otro material del contexto los siguientes:



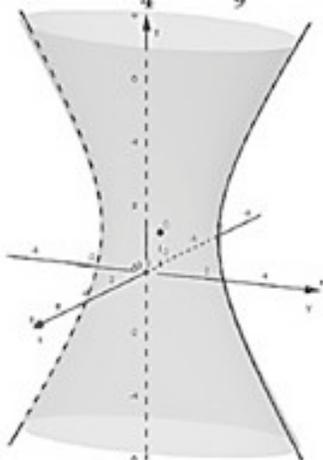


- Con el apoyo del asistente matemático Geogebra construya figuras geométricas y cuerpos geométricos o volúmenes:

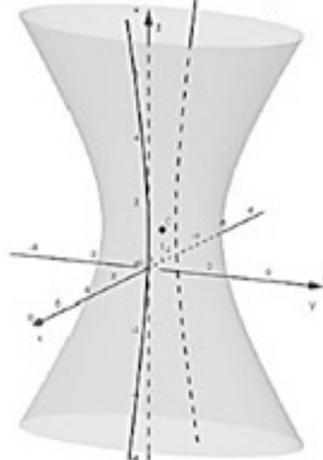
Gráficas de Superficies Cuádricas y trazas empleando Geogebra

**Hiperboloide de una hoja:**

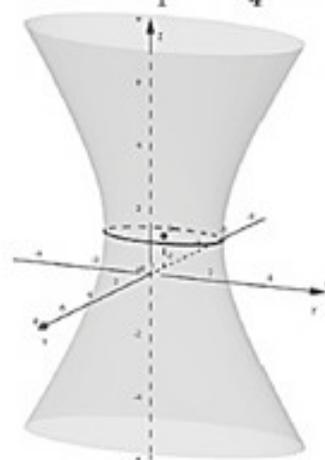
Hipérbola:  $\frac{y^2}{4} - \frac{(z-1)^2}{9} = 1$



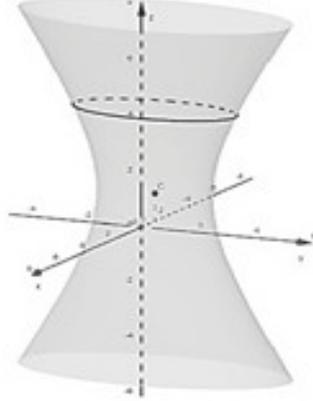
Hipérbola:  $\frac{(x+1)^2}{1} - \frac{(z-1)^2}{9} = 1$



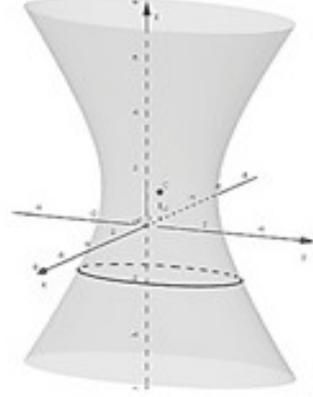
Elipse:  $\frac{(x+1)^2}{1} + \frac{y^2}{4} = 1$



Elipse:  $\frac{(x+1)^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1$

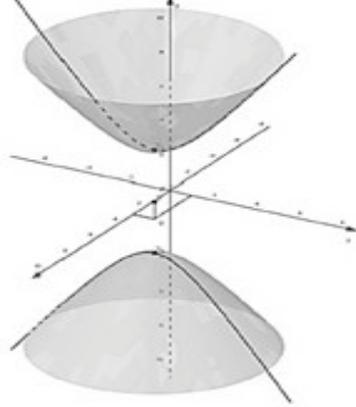


Elipse:  $\frac{(x+1)^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1$

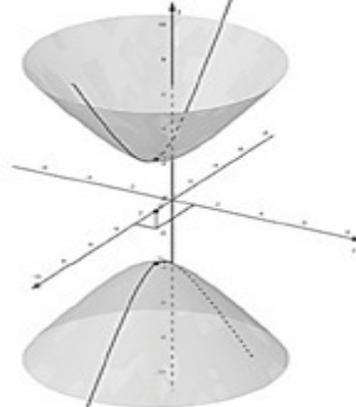


**Hiperboloide de dos hojas:**

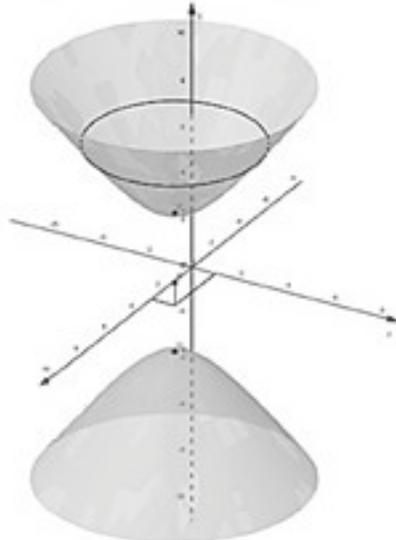
Hipérbola:  $-\frac{(y-1)^2}{4} + \frac{(z-1)^2}{9} = 1$



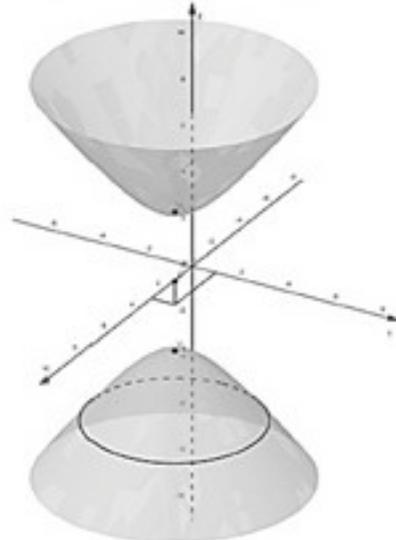
Hipérbola:  $-\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(z-1)^2}{9} = 1$



Elipse:  $\frac{(x-3)^2}{12} + \frac{(y-1)^2}{12} = 1$

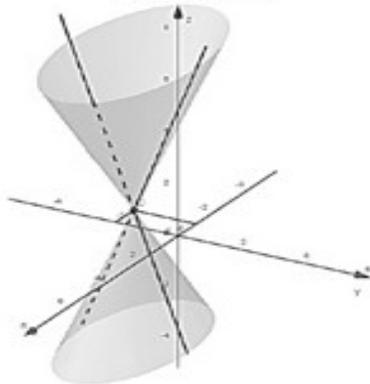


Elipse:  $\frac{(x-3)^2}{12} + \frac{(y-1)^2}{12} = 1$

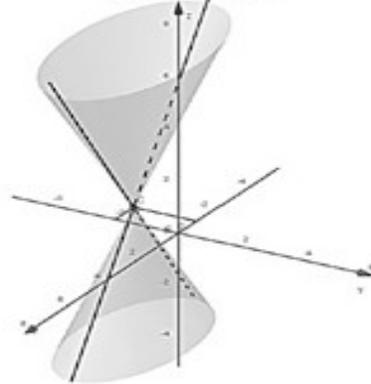


Cono elíptico:

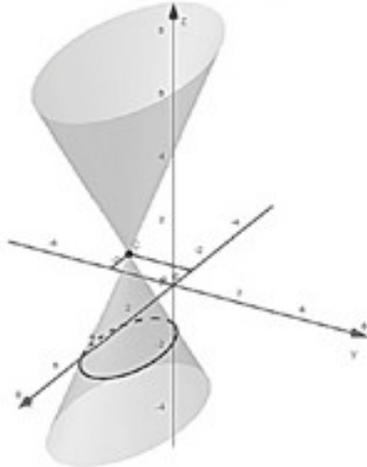
Rectas:  $3y - z + 6 = 0$   
 $3y + z + 6 = 0$



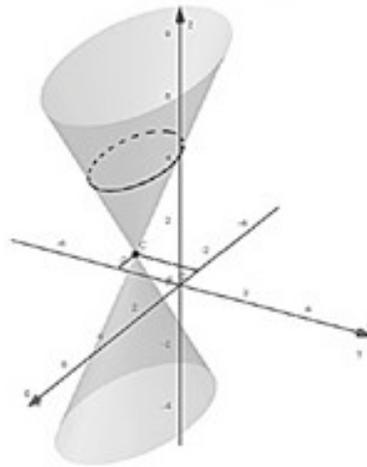
Rectas:  $3x - 2z + 3 = 0$   
 $3x + 2z + 3 = 0$



Elipse:  $\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{1} = 1$

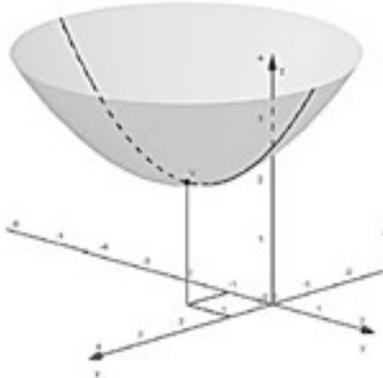


Elipse:  $\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{1} = 1$

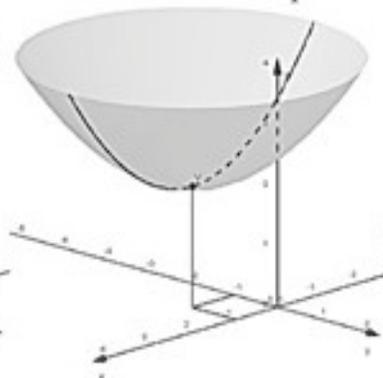


Paraboloide elíptico:

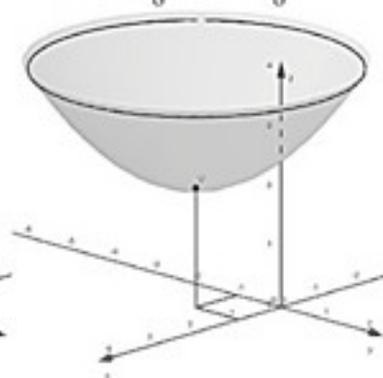
Parábola:  $z - 2 = \frac{(y+1)^2}{4}$



Parábola:  $z - 2 = \frac{(x-1)^2}{4}$



Elipse:  $\frac{(x-1)^2}{8} + \frac{(y+1)^2}{8} = 1$





Handwriting practice area with 20 sets of horizontal lines. Each set consists of a solid top line, a dashed middle line, and a solid bottom line.



En este espacio puedes adjuntar evidencias de tu práctica educativa



# Orientaciones para la Sesión de Socialización



Finalmente nos adentramos en el proceso de valoración de todo el trabajo realizado tanto en la guía como el proceso de concesión. Esto nos ayudará a valorar la apropiación de los distintos conocimientos prácticos y/o teóricos desarrollados durante el proceso formativo y mostrar el logro de nuestros objetivos trazados.

La o el tutor a cargo deberá realizar la evaluación correspondiente a la Unidad de Formación “Cálculo en  $R_n$ , Relación Armónica y Equilibrada con la Producción”, de acuerdo a los siguientes parámetros:

- Evaluación de Evidencias

La o el tutor a cargo debe hacer la revisión de toda la evidencia del producto de las actividades realizadas a partir de la bibliografía propuesta en la guía y otras que hubiesen sido sugeridas.

También están las evidencias de la concreción, como ser: apuntes, videos, fotografías, cuadernos de campo, planes de desarrollo curricular y el material educativo construido.

- Evaluación de la socialización de la concreción

- Se debe socializar como y a partir de qué se hizo la articulación de los contenidos con la malla curricular, el plan de clase y el proyecto Sociocomunitario de la Unidad Educativa.
- El uso y construcción de materiales educativos y su adecuación a los contenidos.
- La aceptación e involucramiento de la comunidad en cuanto al trabajo realizado.
- El o los productos tangibles e intangibles, que se originaron a partir de la concreción.
- Conclusiones.

- Evaluación Objetiva:

Será una evaluación individual. Para ello el participante debe tomar en cuenta todo lo relacionado con los siguientes temas o contenidos:

- a) Vectores en  $R^3$ , operaciones con vectores y otro
- b) Geometría analítica del espacio
- c) Calculo diferencial en  $R^n$
- d) Integrales múltiples



## Bibliografía

- Espinoza E., (2004), Análisis matemático III. Lima-Perú
- Lázaro M., (2012), Geometría en el Espacio Euclidiano  $R^3$ . Lima – Perú
- Espinoza E., (2008), Vectores y Matrices. Lima-Perú
- Mejía Q. R., (2010), Cálculo II. Cochabamba-Bolivia. Editorial Educación y Cultura.
- Chungara V., (2015), Cálculo II. La Paz-Bolivia.
- Gutiérrez A. P. & Moreno S. L., (1992), La práctica del cálculo diferencial e integral. Santa Cruz- Bolivia
- Leithold L., (1972), El Cálculo. México.

**ESPECIALIDAD: MATEMÁTICA**  
**UNIDAD DE FORMACIÓN: CÁLCULO EN  $R^n$ , RELACIÓN ARMÓNICA Y EQUILIBRADA CON LA PRODUCCIÓN**

Temas	Utilidad para la o el maestro	Aplicabilidad en la vida	Contenidos	Bibliografía de profundización
<p>VECTORES EN <math>R</math></p>	<p>El cálculo vectorial o estudio de los vectores son muy importante para estudiar fenómenos que suceden a nuestro alrededor.</p>	<p>Los vectores en el espacio euclidiano se utilizan para el desplazamiento y trayectoria de un objeto en nuestro contexto, como por ejemplo el recorrido de un estudiante de la Unidad Educativa a su casa que se representa por un vector que es una magnitud física que requiere para su completa determinación, que se añade una dirección a su magnitud.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Vectores y escalares</li> <li>• Mejía R., (2010) Calculo II. Cochabamba-Bolivia Editorial Educación y Cultura (Pág. 1-6) OBLIGATORIO</li> <li>• Video: "Gráfica de un vector en el espacio" (00:01 - 06:54 min.) <a href="https://www.youtube.com/results?search_query=Gráfica+de+un+vector+en+el+espacio">https://www.youtube.com/results?search_query=Gráfica+de+un+vector+en+el+espacio</a> OBLIGATORIO</li> <li>• Álgebra vectorial y Operaciones con vectores. Módulo de un vector</li> <li>• Espinoza R. E., (2008) Vectores y Matrices. Lima-Perú (Pág. 10-16)</li> <li>• Video: "Vector en <math>R^3</math> Álgebra educativa" (00:01 - 09:11 min.) <a href="https://www.youtube.com/watch?v=rAiv9lu1oQI">https://www.youtube.com/watch?v=rAiv9lu1oQI</a> OBLIGATORIO</li> <li>• Módulo de un vector</li> <li>• Espinoza R. E., (2008) Vectores y Matrices Lima-Perú (Pág. 17-23)</li> <li>• Video: "Longitud o norma de vector" (00:01 - 07:36 min.) <a href="https://www.youtube.com/watch?v=-Vf93SavISA">https://www.youtube.com/watch?v=-Vf93SavISA</a> OBLIGATORIO</li> <li>• Proyección ortogonal</li> <li>• Espinoza R. E., (2008) Vectores y Matrices. Lima-Perú (Pág. 31-35)</li> <li>• Producto escalar</li> <li>• Mejía R., (2010) Calculo II. Cochabamba-Bolivia 2010 Editorial Educación y Cultura (Pág. 31-35)</li> <li>• Producto vectorial</li> <li>• Espinoza R. E., (2008) Vectores y Matrices Lima-Perú (Pág. 43-48)</li> <li>• Productos triples</li> <li>• Espinoza R. E., (2008) Vectores y Matrices Lima-Perú (Pág. 50-55)</li> <li>• Aplicaciones</li> <li>• Espinoza R. E., (2008) Vectores y Matrices Lima-Perú (Pág. 55 en adelante)</li> </ul>	<p>Mejía R., (2010) Calculo II. Cochabamba-Bolivia Editorial Educación y Cultura.</p> <p>Espinoza R. E., (2008) Vectores y Matrices Lima-Perú.</p> <p>Lázaro M. (2012) Geometría en el Espacio Euclidiano R3 Lima – Perú: MOSHERA S.R.L.</p>



<p><b>GEOMETRÍA ANALÍTICA DEL ESPACIO</b></p>	<p>La geometría analítica del espacio tiene mucha utilidad, porque se ocupa de las propiedades y medidas de figuras geométricas en el espacio tridimensional. Entre estas figuras, también llamados sólido se encuentran el cono, el cubo, el cilindro, la pirámide, la esfera y el prisma. La geometría del espacio amplía y refuerza las proposiciones de la geometría plana, y es la base fundamental de la trigonometría esférica, la geometría analítica del espacio, la geometría descriptiva y otras ramas de las matemáticas. Se usa ampliamente en matemáticas, en ingeniería y en ciencias naturales.</p>	<p>Tiene una particular importancia y aplicabilidad en la arquitectura, ya que la geometría se utiliza para calcular el espacio, ángulos y distancias, que tienen un interés inmediato para el diseño arquitectónico. El arte utiliza la geometría para lo que tiene que ver con la profundidad espacial.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Espacio Euclidiano tridimensional Video: "Espacio Tridimensional 1" (00:01 - 03:01 min.) <a href="https://www.youtube.com/watch?v=5lucSy1Qhj8">https://www.youtube.com/watch?v=5lucSy1Qhj8</a> OBLIGATORIO</li> <li>• La recta</li> <li>• Lázaro M., (2012) Geometría en el Espacio Euclidiano R3. Lima – Perú: MOSHERA S.R.L. (Pág. 49-62) OBLIGATORIO</li> <li>• Video: "Ecuación de la recta en el espacio" (00:01 - 04:42 min.) <a href="https://www.youtube.com/watch?v=fgcH6K6109c">https://www.youtube.com/watch?v=fgcH6K6109c</a> OBLIGATORIO</li> <li>• Distancia de un punto a una recta</li> <li>• LÁZARO CARRIÓN MOISÉS (2012) Geometría en el Espacio Euclidiano R3 Lima – Perú: MOSHERA S.R.L. (Pág. 63-70) OBLIGATORIO</li> <li>• Distancia entre dos rectas</li> <li>• LÁZARO CARRIÓN MOISÉS (2012) Geometría en el Espacio Euclidiano R3 Lima – Perú: MOSHERA S.R.L. (Pág. 67) OBLIGATORIO</li> <li>• El plano.</li> <li>• LÁZARO CARRIÓN MOISÉS (2012) Geometría en el Espacio Euclidiano R3 Lima – Perú: MOSHERA S.R.L. (Pág. 1-3) OBLIGATORIO</li> <li>• Video: "Ecuación de un plano" (00:01 - 08:39 min.) <a href="https://www.youtube.com/watch?v=FUDihyQfOs">https://www.youtube.com/watch?v=FUDihyQfOs</a> OBLIGATORIO</li> <li>• Ecuaciones del plano</li> <li>• Lázaro M., (2012) Geometría en el Espacio Euclidiano R3 Lima – Perú: MOSHERA S.R.L. (Pág. 4-8) OBLIGATORIO</li> <li>• Distancia de un punto a un plano</li> <li>• Lázaro M., (2012) Geometría en el Espacio Euclidiano R3 Lima – Perú: MOSHERA S.R.L. (Pág. 23) OBLIGATORIO</li> <li>• Superficies cuadráticas, cuadráticas y esféricas</li> <li>• Lázaro M., (2012) Geometría en el Espacio Euclidiano R3 Lima – Perú: MOSHERA S.R.L. (Pág. 141-173) OBLIGATORIO</li> <li>• Video: "Ecuaciones de las superficies cuadráticas" (00:01 - 07:19 min.) <a href="https://www.youtube.com/watch?v=SbOw4e1BF6I">https://www.youtube.com/watch?v=SbOw4e1BF6I</a> OBLIGATORIO</li> <li>• Coordenadas curvilíneas</li> <li>• Lázaro M., (2012) Geometría en el Espacio Euclidiano R3 Lima – Perú: MOSHERA S.R.L. (Pág. 173) OBLIGATORIO</li> </ul>	<p>Chungara V., (2015) Cálculo II La Paz-Bolivia: EDITORIAL LEONARDO.</p>
<p><b>CALCULO DIFERENCIAL EN R<sup>n</sup></b></p>	<p>El cálculo diferencial, tiene mucha utilidad en la economía, la administración, la física, etc. Los principales elementos que se utilizan</p>	<p>Como es de esperar se utilizan en varias ocasiones en el campo de las matemáticas, pero además van a tener un uso muy impor-</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Funciones de varias variables</li> <li>• Mejía R., (2010) Calculo II. Cochabamba-Bolivia Editorial Educación y Cultura. (Pág.336)</li> <li>• Video: "Derivadas parciales-Introducción" OBLIGATORIO (d00:01 - 08:39 min.)</li> </ul>	

<p>en esta rama de las matemáticas, son las funciones, las derivadas, los sistemas de ecuaciones, la pendiente, entre otros; que estos a su vez en conjunto ayudan a realizar grandes cálculos en importantes empresas, o simples operaciones en la economía familiar.</p> <p>Las principales aplicaciones del cálculo diferencial son:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• El estudio de movimientos, aspectos de velocidad, y aceleración</li> <li>• Análisis de ecuaciones con binomios.</li> <li>• El cálculo de máximos y mínimos, por ejemplo:</li> </ul> <p>- En una agencia de viajes, o en una empresa, saber cuál es la mayor ganancia que se puede obtener en cierto período, o con cierto producto, pero a la vez, igualmente calcular, si existen pérdidas en estos productos, o en un lapso de tiempo. Si se aplica de manera correcta el cálculo diferencial, se podrán obtener estos resultados, sin ningún problema</p>	<p>tante en la Economía y como es de esperar en la física.</p> <p>La aplicación más importante en matemáticas es resolver problemas de optimización (al igual que las derivadas en una dimensión) en varias variables. Mientras que en la Economía, el concepto de derivada parcial hace referencia a la marginalidad. De esta manera a partir de una función de coste podemos obtener la función de coste marginal respecto de una u otra variable. Análogamente también podríamos hablar la producción marginal o el análisis marginal.</p> <p>En Física se utiliza para expresar la ecuación de difusión del calor.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Límites Mejía R., (2010) Calculo II. Cochabamba-Bolivia Editorial Educación y Cultura (pág.336)</li> <li>• Regla de derivación Chungara V., (2015) Cálculo II La Paz-Bolivia: EDITORIAL LEONARDO (pág. 95) OBLIGATORIO Video: "Derivadas parciales-Ejercicios" (00:01 - 11:09 min.) <a href="https://www.youtube.com/watch?v=Onx678fkpvs">https://www.youtube.com/watch?v=Onx678fkpvs</a> OBLIGATORIO</li> <li>• Derivadas Parciales de orden superior. Chungara V., (2015) Cálculo II La Paz-Bolivia: EDITORIAL LEONARDO. (Pág. 97) OBLIGATORIO</li> <li>• Diferenciales Chungara V., (2015) Cálculo II La Paz-Bolivia: EDITORIAL LEONARDO. (Pág. 100) OBLIGATORIO</li> <li>• Regla de la cadena Chungara V., (2015) Cálculo II La Paz-Bolivia: EDITORIAL LEONARDO (Pág. 102) OBLIGATORIO</li> <li>• Derivación implícita Chungara V., (2015) Cálculo II La Paz-Bolivia: EDITORIAL LEONARDO (Pág. 104) OBLIGATORIO</li> <li>• Jacobianos Chungara V., (2015) Cálculo II La Paz-Bolivia: EDITORIAL LEONARDO (Pág. 107). OBLIGATORIO</li> <li>• Funciones homogéneas teorema de Euler Chungara V., (2015) Cálculo II La Paz-Bolivia: EDITORIAL LEONARDO (Pág. 110) OBLIGATORIO</li> <li>• Teorema de valor medio y de Taylor Chungara V., (2015) Cálculo II La Paz-Bolivia: EDITORIAL LEONARDO (Pág. 111) OBLIGATORIO Video: "Puntos críticos de una función de dos variables" OBLIGATORIO (00:01 - 15:30 min.)</li> <li>• Interpretación geométrica de las derivadas parciales Chungara V., (2015) Cálculo II La Paz-Bolivia: EDITORIAL LEONARDO (Pág. 112) OBLIGATORIO Video: "Plano tangente y recta normal a la superficies" OBLIGATORIO (00:01 - 12:45 min.)</li> </ul>
---	--	--



	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Aplicaciones de derivadas parciales Chungara V., (2015) Cálculo II La Paz-Bolivia: EDITORIAL LEONARDO (Pág. 125-134) OBLIGATORIO Video: "Aplicación de derivadas Máximos y Mínimos" OBLIGATORIO (00:01 - 04:07 min.) Video: "Optimización: Volumen de una caja sin tapa" (00:01 - 14:23 min.) <a href="https://www.youtube.com/watch?v=Y2-oSuC8OtU">https://www.youtube.com/watch?v=Y2-oSuC8OtU</a> OBLIGATORIO</li> </ul>		
<p>INTEGRALES MÚLTIPLES</p>	<p>Entre las utilidades de las integrales múltiples, que pueden ser para la o el maestro, se tienen las aplicaciones geométricas y las físicas. En el cálculo del área de una figura plana y el cálculo de volúmenes de sólidos en el espacio; entre las aplicaciones físicas están el cálculo de: masa, momentos estáticos de figuras planas, centros de masa y momentos de inercia para una región bidimensional.</p> <p>En el cálculo de:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Volumen de un Sólido en el Espacio</li> <li>• Masa de una Figura Plana</li> <li>• Momentos Estáticos de una Figura Plana</li> <li>• Centro de Masa de una Figura Plana</li> </ul>	<p>Entre las aplicaciones de las integrales dobles, se tienen las aplicaciones geométricas y las físicas. En el primer grupo se encuentran: el cálculo del área de una figura plana y el cálculo de volúmenes de sólidos en el espacio; entre las aplicaciones físicas están el cálculo de: masa, momentos estáticos de figuras planas, centros de masa y momentos de inercia para una región bidimensional.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Integrales dobles Chungara V., (2015) Cálculo II La Paz-Bolivia: EDITORIAL LEONARDO OBLIGATORIO Video: "Integrales dobles Parte 1" (00:01 - 13:22 min.) <a href="https://www.youtube.com/watch?v=E8XmjKtO8">https://www.youtube.com/watch?v=E8XmjKtO8</a> OBLIGATORIO</li> <li>• Integrales dobles sobre regiones generales. MEJÍA QUISEBERT RAFAEL (2010) Cálculo II. Cochabamba-Bolivia Editorial Educación y Cultura (Pág. 336)</li> <li>Video: "Solución de una integrales dobles" (00:01 - 05:47 min.) <a href="https://www.youtube.com/watch?v=eu3CNA47KX4">https://www.youtube.com/watch?v=eu3CNA47KX4</a> OBLIGATORIO</li> <li>• Cambio de orden de integración.</li> <li>• Mejía R., (2010) Cálculo II. Cochabamba-Bolivia. Editorial Educación y Cultura (Pág. 350)</li> <li>• Cambio de variable en la integración doble. Mejía R., (2010) Cálculo II. Cochabamba-Bolivia Editorial Educación y Cultura (Pág. 362)</li> <li>Video: "Cambio de variable en integrales dobles" (00:01 - 14:47 min.) <a href="https://www.youtube.com/watch?v=JFVHPd5jJE">https://www.youtube.com/watch?v=JFVHPd5jJE</a> OBLIGATORIO</li> <li>• Integración doble en coordenadas polares. Mejía R., (2010) Cálculo II. Cochabamba-Bolivia Editorial Educación y Cultura (Pág. 371)</li> <li>• Cálculo de áreas de figuras planas. Mejía R., (2010) Cálculo II. Cochabamba-Bolivia Editorial Educación y Cultura (Pág. 379)</li> <li>• Cálculo de volúmenes Mejía R., (2010) Cálculo II. Cochabamba-Bolivia Editorial Educación y Cultura (Pág. 385)</li> <li>• Cálculo de área de superficies Mejía R., (2010) Cálculo II. Cochabamba-Bolivia Editorial Educación y Cultura (Pág. 399)</li> </ul>

			<ul style="list-style-type: none"> <li>Integral triple Mejía R., (2010) Calculo II. Cochabamba-Bolivia Editorial Educación y Cultura (Pág. 414) Video: "Ejercicio de integral triple" <a href="https://www.youtube.com/watch?v=G5nwF2hibX4">https://www.youtube.com/watch?v=G5nwF2hibX4</a> OBLIGATORIO</li> <li>Integral triple en coordenadas cilíndricas Mejía R., (2010) Calculo II. Cochabamba-Bolivia Editorial Educación y Cultura (Pág. 438)</li> <li>Integral triple en coordenadas esféricas Video: "Aplicación de integrales triples Coordenadas Esféricas" (00:01-09:14 min.) <a href="https://www.youtube.com/watch?v=RuAy6tQ0zcc">https://www.youtube.com/watch?v=RuAy6tQ0zcc</a> OBLIGATORIO</li> <li>Mejía R., (2010) Calculo II. Cochabamba-Bolivia Editorial Educación y Cultura (Pág. 442)</li> <li>Volumen con integral triple Mejía R., (2010) Calculo II. Cochabamba-Bolivia Editorial Educación y Cultura (Pág. 446)</li> <li>Cambio de variable e n la integra triple. Mejía R., (2010) Calculo II. Cochabamba-Bolivia Editorial Educación y Cultura (Pág. 456)</li> </ul>	
--	--	--	--	--







**Revolución Educativa  
con Revolución Docente  
para Vivir Bien**